랑데뷰수학

2022 수학I 쉬사준킬 변형 문제집

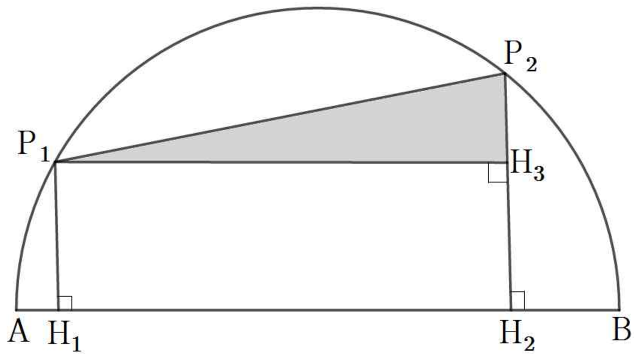
송원학원

1) 1번 변형

등식 $\sqrt[3]{-432}+\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{b}=0$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 구하시오.
[4점]
쉬준-17

2) 5번 변형

그림과 같이 길이가 $\sqrt[4]{80}$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 $\mathrm{P_1}$와 $\mathrm{P_2}$가 있다. 점 $\mathrm{P_1}$와 $\mathrm{P_2}$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 할 때, $\overline{\mathrm{P_1H_1}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $\overline{\mathrm{P_2H_2}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$이다. 점 $\mathrm{P_1}$에서 선분 $\mathrm{P_2H_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$라 할 때, 삼각형 $\mathrm{P_1H_3P_2}$의 넓이를 S라 하자. $S^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
[4점]



쉬준-31

3) 6번 변형

$3^{2x}=\left(\frac{625}{9}\right)^{y}=25$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $5^{\frac{(x-y)(x+y)}{4x^2y^2}}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{9}{25}$

④ $\frac{81}{625}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

쉬준-19

4) 13번 변형

$\log_2\left(-x^2+2\sqrt{a}x+3a\right)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 9일 때, 자연수 a의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-16

5) 17번 변형

1이 아닌 두 양의 실수 a, b에 대하여 $a^{a-b}=b^{36}$, $b^{a-b}=a^4$을 만족할 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, $a>b$) [4점]

쉬준-20

6) 18번 변형

자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}\log_{36}\frac{a_n}{f(a_n)}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3-1

7) 19번 변형

$f(x)$를 $\log_2 x$의 소수부분이라 할 때, 한 자리 자연수 a에 대하여 $f(a)$의 최댓값을 A, 두 자리 자연수 b에 대하여 $f(b)$의 최댓값을 B, 세 자리 자연수 c에 대하여 $f(c)$의 최댓값을 C라 하자. $2^{C-B-A}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

3-2

8) 20번 변형

$a>b>1$인 두 자연수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y=-x^2+\dfrac{9}{4}\log_b a$위의 $x=\dfrac{3}{2}\sqrt{\log_b a}$인 점 A에서의 접선 l이 y축과 만나는 점을 B라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{OB}}>3\overline{\mathrm{OA}}$ (단, O는 원점이다.)

ㄴ. 점 $\left(\dfrac{5}{2},\ 3\right)$이 직선 l 위의 점이면 $\overline{\mathrm{OB}}=5\overline{\mathrm{OA}}$이다.

ㄷ. 삼각형 OAB의 넓이가 8이 될 수 있게 하는 b의 최솟값은 512이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3-1

9) 21번 변형

양수 x가 다음 조건을 만족시킬 때, $7\log x$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $2 < \log x < \frac{5}{2}$
(나) $\log \frac{x^3}{4}$와 $\log \frac{5}{2\sqrt{x}}$의 소수부분이 같다.

쉬준-36

10) 22번 변형

두 양수 A, B에 대하여 두 상용로그 $\log A$와 $\log B$의 정수부분의 합이 4, 소수부분의 합이 1일 때, $\log_3 \sqrt[5]{AB}$의 값은? [4점]

① $\log_3 \sqrt{10}$ ② $\frac{1}{\log 3}$ ③ $\frac{3}{2\log 3}$
④ $\frac{2}{\log 3}$ ⑤ $\log_3 5$

쉬준-37

11) 23번 변형

첫째항이 $\frac{1}{9}$이고 공비가 $\sqrt[3]{9}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log a_n$의 정수부분을 b_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{n} b_k = -3$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

쉬준-38

12) 25번 변형

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{52}{9}$ 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 직선 AB가 원 C 의 넓이를 이등분할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-39

13) 27번 변형

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표가 $(2, k)$일 때, 방정식 $2\{\log_2 f(x)-1\}=\log_2\left\{f(x)+\frac{5}{4}\right\}$의 서로 다른 모든 실근의 합은? (단, $0<k<5$) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3-2

14) 30번 변형

$a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에서 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_a(2k-x)$이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 두 곡선이 서로 만나는 점을 C라 하자. $\angle ACB=90^\circ$일 때, 직각삼각형 ABC의 내부(경계 제외)의 격자점 (p, q)의 개수가 100일 때, $a^{22}+k$의 값을 구하시오. (단, k, p, q는 자연수이다.) [4점]

4-4

15) 31번 변형

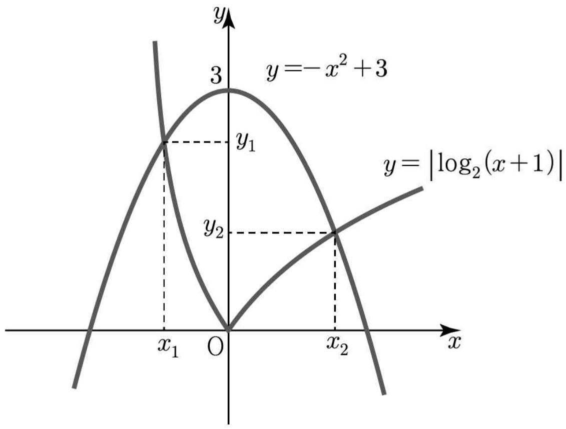
함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 첫째항이 4이고 $a_6=a_2+8$를 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $f(a_1)\times f(a_2)\times\cdots\times f(a_{10})$의 값을 k라 할 때, $\log_2 k$의 값은? [4점]

① 55　② 70　③ 95
④ 110　⑤ 135

5-3

16) 45번 변형

두 곡선 $y=|\log_2(x+1)|$, $y=-x^2+3$가 만나는 두 점의 좌표를 $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<0<x_2$) [4점]



<보 기>

ㄱ. $-\frac{7}{8}<x_1<-\frac{3}{4}$

ㄴ. $1<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $x_2+y_2<3<2x_2+y_2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5-4

17) 57번 변형

세 실수 x, y, z에 대하여 $3^x = 4^y = a^z$ 일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $xyz \neq 0$이고 a는 1이 아닌 양수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a > 4$이면 $z < y < x$이다.

ㄴ. $a = 12$이면 $\dfrac{xy}{x+y} = z$이다.

ㄷ. $a = \dfrac{1}{12}$이고 $x = p$, $z = \sqrt{p}$ 이면 $y = \dfrac{p(1-\sqrt{p})}{p-1}$이다. (단, $p \neq 1$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6-1

18) 75번 변형1

곡선 $y = a^x$위의 점 $A_1(0, 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = \left(\dfrac{1}{5}\right) \times a^x$ 과 만나는 점을 B_1, 점 B_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y = a^x$과 만나는 점을 A_2, 점 A_2을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = \left(\dfrac{1}{5}\right) \times a^x$과 만나는 점을 B_2라 하자. 두 선분 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ 및 두 곡선 $y = a^x$, $y = \left(\dfrac{1}{5}\right) \times a^x$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 20일 때 a의 값은? (단, $a > 1$) [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

쉬준-53

19) 75번 변형2

곡선 $y=\log_a x$위의 점 $\mathrm{A}_1(1, 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a 5x$와 만나는 점을 B_1, 점 B_1을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$과 만나는 점을 A_2, 점 A_2을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a 5x$와 만나는 점을 B_2라 하자. 두 선분 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$ 및 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_a 5x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 8일 때 a의 값은? (단, $a>1$) [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

5-2

2.삼각함수

20) 81번 변형

삼각형 ABC가 $\sin(\angle \mathrm{ABC})=\dfrac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$을 만족시킬 때, 이 삼각형의 외접원의 둘레의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi$ ③ 6
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 4π
쉬준-50

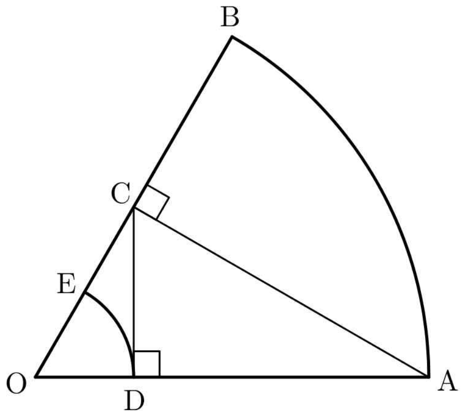
21) 81번 변형2

삼각형 ABC가 $\sin(\angle \mathrm{ABC})=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AC}}=1$을 만족시킬 때, 이 삼각형의 외접원의 둘레의 길이는?

① $\dfrac{\pi}{6}$ ② 1 ③ $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ ④ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ⑤ 3
클리어6평

22) 82번 변형

그림과 같이 중심이 O이고 호 DE의 길이가 2π. 넓이가 6π인 부채꼴 ODE가 있다. 점 D를 지나고 직선 OD에 수직인 직선이 직선 OE와 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 직선 OE에 수직인 직선이 직선 OD와 만나는 점을 A라 하자. 중심이 O이고 반지름의 길이가 OA인 원이 직선 OE와 만나는 점을 B라 할 때, 호 AB의 길이는? [4점]



① $\frac{16}{3}\pi$ ② 6π ③ $\frac{20}{3}\pi$

④ $\frac{22}{3}\pi$ ⑤ 8π

쉬준-42

23) 85번 변형

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$에 대하여 대칭이 되도록 하는 모든 θ중 가장 큰 값은? (단, $0<\theta<2\pi$) [4점]

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{23}{15}\pi$ ③ $\frac{5}{3}\pi$

④ $\frac{7}{4}\pi$ ⑤ $\frac{14}{5}\pi$

쉬준-43

24) 86번 변형

중심이 제1사분면에 있고 y축과 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$에 동시에 접하는 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 y축과 접하는 점을 T라 할 때, 점 T에서 y축에 접하고 직선 $y=-\sqrt{3}x$에 접하는 중심이 제2사분면에 있는 원 D가 있다. 두 원 C와 D의 중심 사이의 거리는? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $4(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ③ $3(\sqrt{2}-1)$
④ $2(\sqrt{3}-1)$ ⑤ $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

쉬준-44

25) 88번 변형

방정식 $\sqrt{\frac{1}{2}-\sin x\cos x}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sin x\cos x}=1$의 해를 $x=\alpha$라 할 때, $\sin 2\alpha$의 값은? (단, $0<\sin x \leq \cos x$) [4점]

① 1 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

쉬준-45

26) 89번 변형

$\cos^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{5}{28}\pi$
$+\cos^2\frac{9}{28}\pi+\cos^2\frac{5}{14}\pi+\cos^2\frac{3}{7}\pi$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-43

27) 95번 변형

$0<x<2\pi$일 때, 3이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sin 2x$와 $y=\sin(nx)$의 접점의 개수가 4이게 하는 n의 값을 작은거부터 크기순으로 나타낸 수열을 $\{a_n\}$라 하자. a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-41

28) 97번 변형

$0 \leq x \leq \pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{4}{3}\pi\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|+a$에 대하여 방정식 $\sin f(x)=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값을 M이라 하고 그때의 가능한 모든 a값의 합을 S라 하자. $M\times S$의 값은? (단, $0 \leq a \leq 3\pi$) [4점]

① $\frac{35}{3}\pi$ ② 12π ③ $\frac{37}{3}\pi$

④ $\frac{38}{3}\pi$ ⑤ 13π

쉬준-48

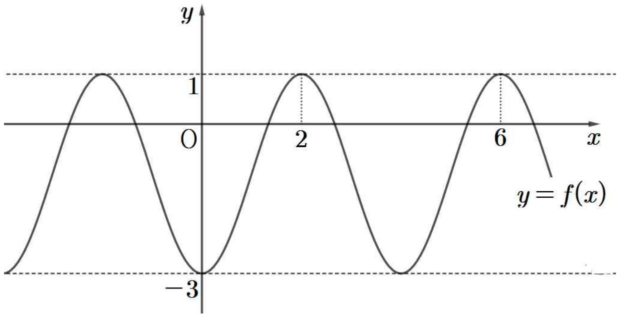
29) 98번 변형

함수 $y=2^{x-2}+1$의 역함수의 점근선이 함수 $y=\tan\frac{2\pi}{a}x$의 한 점근선이 되도록 하는 양의 실수 a에 대하여 크기가 큰 순으로 나열할 때, n번 째 수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$) [4점]

쉬준-47

30) 100번 변형

$a>0$, $b>0$, $0<c<6\pi$, $d<0$인 네 상수 a, b, c, d에 대하여 함수 $f(x)=a\cos(b\pi x-c)+d$의 그래프는 다음 그림과 같다. $a\sin\left(b\pi+\dfrac{cd}{6}\right)=-\sqrt{3}$일 때, $a\times b\times c\times d$의 값은? [4점]



① $-\pi$ ② -3π ③ -5π
④ -6π ⑤ -10π

쉬준-41

31) 101번 변형

두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos bx+a\ \left(0\le x\le\frac{2\pi}{b}\right)$$

의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, $y=2a$와 만나는 두 점을 B, C라 할 때, $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{b}} f(x)dx=16$일 때, $a+b$의 값은?

① $2+\dfrac{\pi}{4}$ ② $2+\dfrac{\pi}{2}$ ③ $3+\dfrac{\pi}{4}$
④ $3+\dfrac{\pi}{6}$ ⑤ $3+\dfrac{\pi}{8}$

클리어6평
쉬준-93
9평 10번 변형

32) 102번 변형

집합 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여

$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)+g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+g^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)=k$이다.

$f\left(\frac{k}{2}\right)+g\left(\frac{k}{3}\right)$의 값은? (단, 두 함수 f, g의 역함수는 각각 f^{-1}, g^{-1}이다.) [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

쉬준-49

33) 104번 변형

함수 $f(x)=9^{\sin x}-3^{\sqrt{1-\cos^2 x}}+1$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, $0 \leq x \leq \pi$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 8
④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

6-3

34) 107번 변형

두 함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 함수 $h(x)=\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)}{g\left(\dfrac{\pi}{3}f(\pi-x)\right)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M^2+m^2의 값을 구하시오. [4점]

클리어6평

35) 109번 변형

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x-\frac{7}{6}\pi\right)+k-2$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$가 성립할 때, k의 최솟값을 구하시오. [4점]

쉬준-51

36) 111번 변형

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 직선 $l : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + k$ 이 만나는 두 교점 중 제1사분면 위의 점을 $\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta)$이라 하자. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때, $k\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \theta\right)$의 값은? $\left(\text{단, } \dfrac{\sqrt{3}}{3} < k < 1\right)$ [4점]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$　② $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　③ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

④ $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{6}}{9}$

쉬준-52

37) 114번 변형

자연수 k와 양의 실수 t에 대하여 이차방정식 $|\sin kt|x^2 - 2tx + 4\pi t = 0$이 중근을 가지게 하는 실수 t의 개수는 31이다. 이때, k의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-48

38) 115번 변형

$0 \le x < \frac{\pi}{2}$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$n\tan(2nx)-1=0$$

의 모든 실근의 합을 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}[n\tan\{2f(n)\}]$의 값은? [4점]

① -220 ② -215 ③ -210
④ -205 ⑤ -200

쉬준-51

39) 116번 변형

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 이차방정식 $x^2-kx+\frac{1}{4}k^2=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

5-4

40) 117번 변형

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(2\cos\theta+1)x^2-(3\sin^2\theta-5\sin\theta-2\cos\theta+1)x$$

$$+3\sin^2\theta-5\sin\theta+1=0$$

이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 θ의 범위가 $\alpha<\theta<\beta$일 때, $6\alpha+12\beta$의 값은? (단, 중근은 한 개의 근이 아니다.)[4점]

① 9π ② 10π ③ 11π
④ 12π ⑤ 13π

쉬준-55

41) 118번 변형

$0 \le x < 2\pi$일 때, 함수 $f(x)=\cos x$에 대하여 방정식 $f(|f(2x)|)=k$ $(\cos 1<k<1)$의 서로 다른 실근의 개수는 a이고 모든 해의 합은 $b\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b, k는 상수이다.) [4점]

쉬준-57

120번 변형

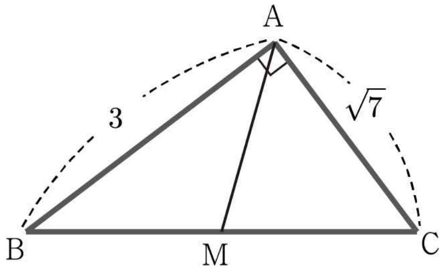
두 실수 a와 b에 대하여 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2a}, \frac{5\pi}{2a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 두 점 $\mathrm{A}(\pi, k)$, $\mathrm{B}(3\pi, k)$을 지나고 $f\left(\frac{10}{9}\pi\right)=-1$일 때, k의 값과 같은 것은? (단, $\frac{1}{2}<a<1$이고 k는 상수이다.) [4점][42]

① $\sqrt{2}-1$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}-2$
④ $2\sqrt{2}-3$ ⑤ -2

쉬준-58

[43] 122번 변형

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{7}$이고 $\angle\mathrm{BAC}=90°$인 직각삼각형 ABC에서 빗변 BC의 중점을 M이라 하자. 삼각형 ABM의 외접원의 넓이를 S_1, 삼각형 ACM의 외접원의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 값은? [4점]

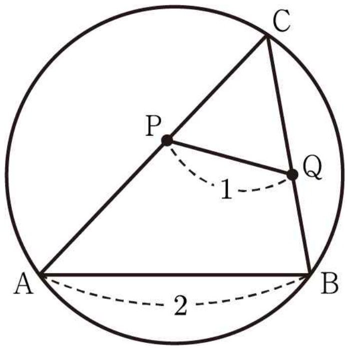


① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{9}{7}$ ④ $\frac{10}{7}$ ⑤ $\frac{11}{7}$

5-4

44) 123번 변형

그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 O에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC위의 점 P와 선분 BC위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이면서 $\overline{\mathrm{PC}}$가 최대일 때, 삼각형 CPQ의 넓이는? [4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\sqrt{5}$

쉬준-54

45) 126번 변형

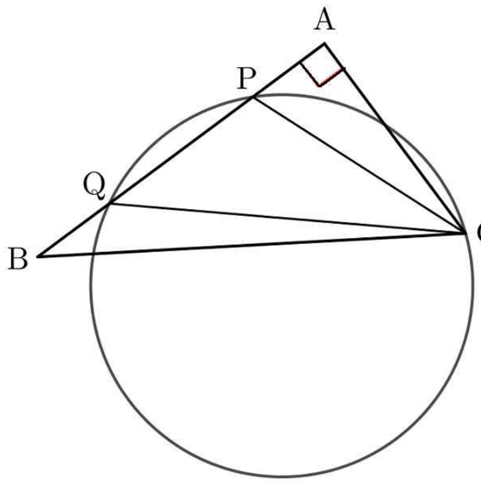
길이가 각각 a, b, c 인 세 선분 BC, CA, AB 를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 둘레의 길이가 13π이고 $bc=13a$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-\cos A=\frac{17}{13}$일 때, a의 값으로 가능한 모든 값의 합은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

5-2

46) 130번 변형

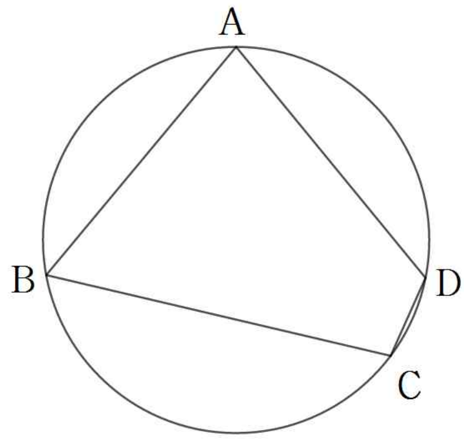
그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB의 4등분점 중 점 A에서 가장 가까운 점을 P, 점 B에서 가장 가까운 점을 Q라 하자. 삼각형 PQC의 외접원의 넓이가 16π일 때, 삼각형 QBC의 넓이는 S이다. S^2의 값을 구하시오. [4점]



3-1

47) 131번 변형

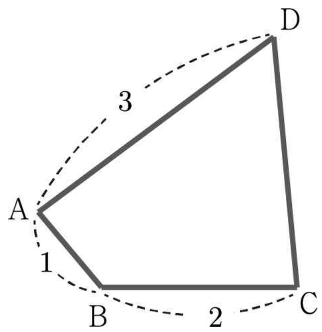
그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=1$, $\overline{DA}=3$인 사각형 ABCD가 있다. 사각형 ABCD의 넓이를 S라 할 때, $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]



5-1

48) 132번 변형

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$이고 $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=\pi$인 사각형 ABCD에서 삼각형 ABD의 넓이가 $\sqrt{2}$일 때, 선분 CD의 길이는? $\left(단,\ 0<\angle\mathrm{BAD}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\dfrac{1}{3}(\sqrt{10}-1)$　② $\dfrac{2}{3}(\sqrt{10}-1)$

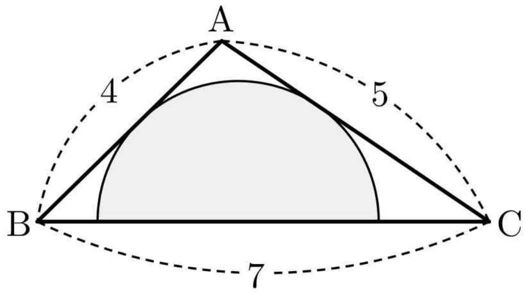
③ $\sqrt{10}-1$　④ $\dfrac{4}{3}(\sqrt{10}-1)$

⑤ $\dfrac{5}{3}(\sqrt{10}-1)$

5-3

49) 134번 변형

그림과 같이 세 변의 길이가 4, 5, 7인 삼각형 ABC에 내접하는 반원의 넓이는? [4점]



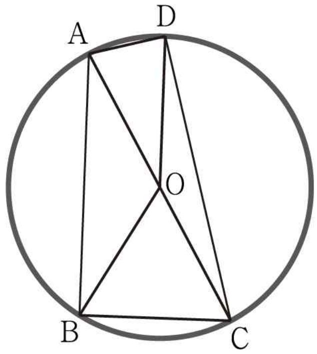
① $\dfrac{32}{81}\pi$　② $\dfrac{32}{27}\pi$　③ $\dfrac{128}{81}\pi$

④ $\dfrac{64}{27}\pi$　⑤ $\dfrac{128}{27}\pi$

쉬준-55

50) 135번 변형

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 삼각형 OAD의 넓이가 1이고 삼각형 OBC의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 나머지 두 삼각형 OAB, OCD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $5S_1=12S_2$일 때, 선분 CD의 길이는? [4점]



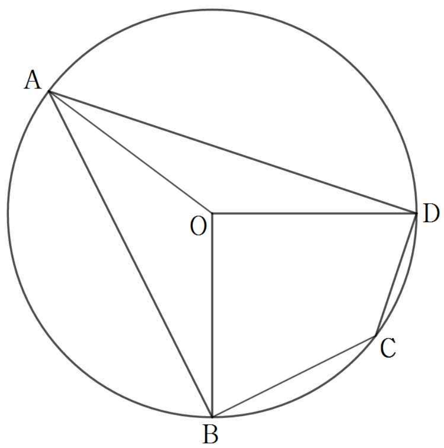
① $\frac{6\sqrt{26}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{26}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{26}}{13}$

④ $\frac{9\sqrt{26}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{26}}{13}$

쉬준-56

51) 136번 변형

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이 있다. 이 원에 내접하면서 중심 O을 포함하는 사각형 ABCD에 대하여 두 삼각형 OAB, OAD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\angle BCD : \angle BOD = 3:2$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [4점]



클리어6평

쉬준-64

52) 138번 변형

좌표평면에서 중심이 원점 O인 원 $x^2+y^2=4$위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(-2,0)$, P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 선분 OA, OP에 의하여 나누어진 두 부채꼴의 넓이 중 작은 것은 $\frac{5}{3}\pi$이다.
(나) 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta>\tan\theta$

$\cos\theta+\tan\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

5-2

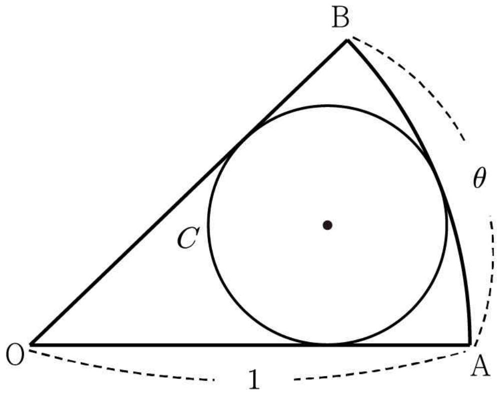
53) 141번 변형

$0<\theta<2\pi$일 때, 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$와 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 이 원에 접하는 접선과 점 $\mathrm{A}(-2,0)$사이의 거리가 1보다 크고 $1+\sqrt{3}$보다 작게 되도록 하는 θ의 값의 범위는 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a<\theta<b$, $c<\theta<d$이다. $\frac{d}{a}+\frac{c}{b}$의 값을 구하시오. (단, $a<b<c<d$) [4점]

5-3

54) 142번 변형

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1, 호 AB의 길이가 θ인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 내부에 두 선분 OA, OB및 호 AB와 접하는 원 C가 있다. 원 C의 넓이와 같은 것은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① $\pi\left(\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2$ ② $\pi\left(\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{1-\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2$

③ $\pi\left(\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2$ ④ $\pi\left(\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2$

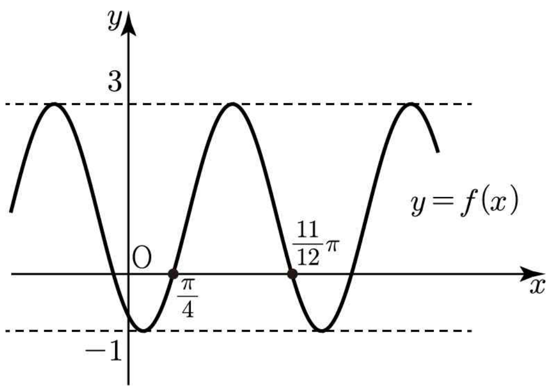
⑤ $\pi\left(\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{1+\cos\dfrac{\theta}{2}}\right)^2$

쉬준-77

55) 143번 변형

모두 양수인 네 상수 a, b, c, d $\left(1<b<3,\ \pi<c<\dfrac{3}{2}\pi\right)$에 대하여 함수 $f(x)=a\sin(bx+c)+d$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c\times d$의 값은?

$\left(단,\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{11}{12}\pi\right)=0\right)$ [4점]



① 5π ② $\dfrac{16}{3}\pi$ ③ $\dfrac{17}{3}\pi$

④ 6π ⑤ $\dfrac{17}{3}\pi$

쉬준-80

56) 144번 변형

x에 대한 부등식

$$\left(\frac{2^x}{16}-1\right)\left(2^{x-p}-1\right)\le 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 10일 때, 음의 정수 p의 값은? [4점]

① -2 ② -3 ③ -4
④ -5 ⑤ -6

쉬준-11

57) 145번 변형

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\,1)$, $\mathrm{B}(0,\,-1)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원 C가 있다. $a>1$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a\left(\sqrt{3}x+1\right)-1$의 그래프와 원 C가 만나는 두 점 중에서 y축 위의 점이 아닌 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{3}$일 때, a^3의 값은? [4점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

쉬준-80

58) 146번 변형

$0 \le x \le \pi$일 때, 방정식 $(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3}\sin x + 1$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{1}{4}\pi$ ② $\frac{1}{2}\pi$ ③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

쉬준-93

59) 147번 변형

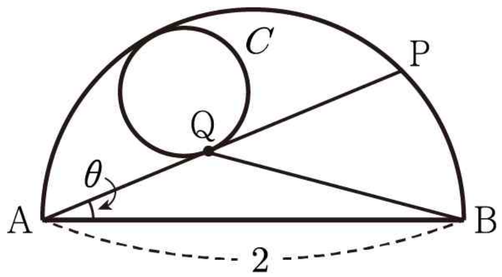
$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos(|\cos x|) = \frac{\sqrt{2}}{2}$의 모든 근의 합은? [4점]

① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ 3π ⑤ 4π

쉬준-79

60) 148번 변형

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원의 호 위의 한 점을 P라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 선분 AP와 호 AP에 접하는 원 C의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{9}\pi$이다. 원 C의 넓이가 최대일 때, 원 C와 선분 AP의 교점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{BQ}}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



6-3

61) 156번 변형

두 함수 $f(x)=\sin ax+1$, $g(x)=2\cos 36x$와 어떤 상수 k $(0<k<2)$에 대하여 두 방정식 $f(x)=k$와 $g(x)=k$의 해집합을 각각 F, G라 하자. $F\subset G$일 때, 가능한 모든 자연수 a의 합을 구하시오. [4점]

쉬준-60

62) 157번 변형1

자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\cos\frac{2(m-1)}{k}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때 $n(A_k)=31$을 만족시키는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

쉬준-54

63) 157번 변형2

자연수 k에 대하여 집합 A_k를

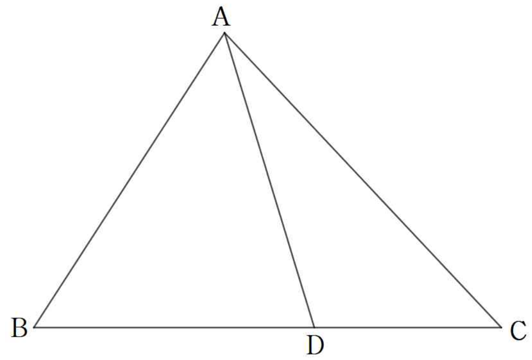
$$A_k=\left\{\cos\frac{2m-1}{k}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때, $n(A_k)=100$을 만족시키는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

5-2

64) 158번 변형

그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자. 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sin B}{\sin C}=a$일 때, $\dfrac{\sin(\angle\mathrm{BAD})}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=ka$이다. k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]



① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

6-2

65) 161번 변형
두 수 4와 67사이에 n개의 자연수를 넣어서 만든 수열이 이 순서대로 공차가 1이 아닌 등차수열을 이룬다. 이 수열의 항 중에서 25이 존재할 때, 가능한 n의 값의 합을 구하시오. [4점]
쉬준-53

66) 163번 변형 (삼각함수)
$1 \le a \le 4$, $0 < b \le 1$인 두 상수 a, b에 대하여 $0 \le x < 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x) = \left| a\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + b \right|$가 있다. 어떤 실수 k에 대하여 직선 $y = k$와 곡선 $y = f(x)$의 교점의 개수가 3일 때, 이 세 점의 x좌표를 각각 α, β, γ라 하자. α가 최소일 때, $\left(\frac{1}{2}a - \frac{\gamma}{\beta}\right) \times b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $\frac{1}{M-m}$의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \beta < \gamma$) [4점]
6-2

67) 164번 변형

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=2$일 때 다음 조건을 만족하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a_{2k-1}+a_{2k+7}=100$

(나) $\sum_{n=1}^{2k+5} a_n = 26(k^2-3)$

쉬준-54

68) 171번 변형

공비가 $r(r \neq 1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$$\frac{(S_8)^3}{(S_4)^2 \times S_{12}} = 3$$

이 성립할 때, r^{12}의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-61

69) 173번 변형

함수 $f(x)=x^2-kx$와 함수 $g(x)=2x^2-9x+12$에 대하여 두 함수의 그래프가 두 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 각각 a, b $(k<a<b)$라 하자. k, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? (단, k, a, b는 상수이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

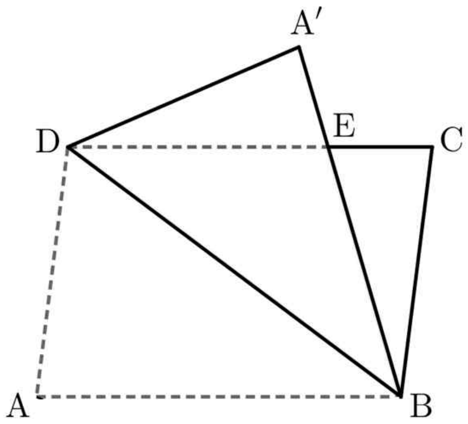
쉬준-66

70) 174번 변형

좌표평면에서 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$와 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 두 점 A, B에서 만난다. 함수 $f(x)$위의 점 C에 대하여 세 점 A, B, C의 x좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 삼각형 ABC의 넓이가 16이다. k의 값은? (단, 점 C의 x좌표>점 B의 x좌표>점 A의 x좌표) [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

71) 175번 변형
그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 이 도형을 대각선 BD를 접는 선으로 하여 접었을 때, A가 이동된 점을 A′이라 하고 선분 A′B가 선분 DC와 만나는 점을 E라 할 때, 삼각형 EDA′의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{15}$이다. $\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$의 값은? [4점]



① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{26}{15}$
④ $\frac{9}{3}$ ⑤ $\frac{28}{15}$

6-2

72) 177번 변형
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n은 모든 자연수 n에 대하여 반지름의 길이가 $\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+2}}$이고, 중심각의 크기가 $\frac{1}{2^n}+4$인 부채꼴의 넓이다. $\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{S_n}-2\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{31}{64}$ ② $\frac{125}{256}$ ③ $\frac{63}{128}$
④ $\frac{127}{256}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6-1

73) 178번 변형

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때, $m^{S_n}=n^2+5n+6$이 성립한다. $a_1+a_6+a_{11}=1$을 만족하는 m의 값을 구하시오. (단, $m\neq1$인 자연수) [4점]

쉬준-62

74) 179번 변형

공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=25$, $S_{2k}=-25$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_4의 값을 구하시오. (단, a_1은 자연수이다.) [4점]

쉬준-63

75) 180번 변형

수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{12}이 3개의 1과 3개의 -1, 3개의 2와 3개의 -2를 순서를 바꾸어 늘어놓은 것일 때, $\sum_{k=1}^{12}\left(a_k-\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(a_k+k)^2$의 값은? [4점]

① $\frac{1065}{2}$ ② $\frac{1067}{2}$ ③ $\frac{1069}{2}$
④ $\frac{1071}{2}$ ⑤ $\frac{1073}{2}$

쉬준-64

76) 181번 변형

모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=k}^{n}a_m\right)=-\frac{1}{n+2}$$

을 만족시킨다. 이때, $\sum_{n=1}^{8}a_n$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{23}{90}$ ③ $-\frac{17}{90}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{11}{45}$

쉬준-65

77) 182번 변형

좌표평면 위의 n개의 점 $\mathrm{P}_k(x_k, y_k)$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n^3+2n$, $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 2n^3+n$
(나) 점 P_k는 직선 $y=-x-n$위의 점이다.

원 $(x-n)^2+(y-n)^2=n^2$위의 점 A에 대하여 선분 AP_k의 길이의 최댓값을 M_k, 최솟값을 m_k라 할 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n}(M_k \times m_k)$이다. $\sum_{n=1}^{10} \frac{a_n}{3n}$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-66

78) 183번 변형

자연수 n에 대하여 x에 대한 다항식 $x^3-(n^2+2)x+2n^2$를 일차식 $x-1$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 a_n이라 하고 $Q(x)$를 $x-1$으로 나눈 나머지를 b_n이라 하자. $\sum_{n=2}^{11} a_n + \sum_{n=1}^{10} b_n$의 값은? [4점]

① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

쉬준-61

79) 184번 변형

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_{3k-2} = 40, \ \sum_{k=1}^{10} a_{3k-1} = 60$$

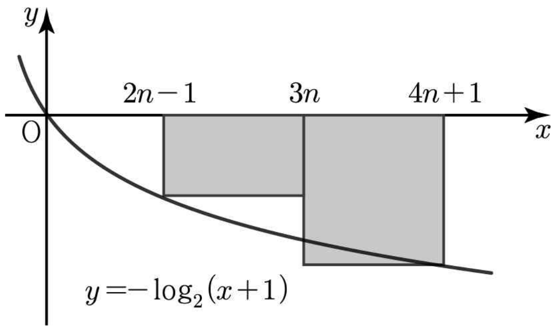
일 때, a_{50}은? [4점]

① 75 ② 80 ③ 85
④ 90 ⑤ 95

쉬준-62

80) 185번 변형

다음 그림과 같이 한 변은 각각 x축 위에 있는 두 직사각형이 있다. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=-\log_2(x+1)$ 위의 점 $(2n-1, -\log_2 2n)$과 점 $(3n, 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖는 직사각형과 점 $(3n, 0)$와 점 $(4n+1, -\log_2(4n+2))$을 연결한 선분을 대각선으로 갖는 직사각형의 넓이의 차를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} \frac{a_{2^n-1}}{2^n} = \alpha$일 때, 2^α의 값을 구하시오. [4점]



쉬준-63

81)186번 변형

자연수 n에 대하여 두 함수 $y=x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$와 $x=n$의 교점을 각각 A, B라 하자. 점 $\mathrm{C}(n+1,\ 0)$에 대하여 세 점 A, B, C을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{9(2n+1)}{16a_na_{n+1}}$의 값은? [4점]

① $\frac{120}{121}$ ② 1 ③ $\frac{122}{121}$

④ $\frac{123}{121}$ ⑤ $\frac{124}{121}$

쉬준-70

82) 188번 변형

이차함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\{x-3k(k+1)\}^2$이 $x=g(n)$에서 최솟값을 가질 때, $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{g(n)}$의 값은? (단, n은 자연수)

① $\frac{25}{51}$ ② $\frac{50}{51}$ ③ $\frac{51}{52}$ ④ $\frac{99}{101}$ ⑤ $\frac{101}{102}$

쉬준-69

83) 190번 변형

곡선 $y=x^2+x$와 직선 $x=n$의 교점을 A_n이라 하고 점 $\mathrm{B}_n(n+2, 0)$에 대하여 $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n}$의 값은? (단, O는 원점이고 n은 자연수이다.) [4점]

① $\frac{65}{132}$ ② $\frac{61}{132}$ ③ $\frac{31}{66}$
④ $\frac{21}{44}$ ⑤ $\frac{10}{11}$

6-3

84) 194번 변형

수열 $\{a_n\}$은 $a_3=3$, $a_4=4$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_n+a_{n+1}-a_{n+2}=2n-1$$

을 만족시킨다. a_1+a_7의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

쉬준-77

85) 196번 변형

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=3$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{40} a_k=42$일 때, a_2의 값을 구하시오.

쉬준-67

86) 197번 변형

첫째항이 -16이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 제1항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_m+S_{m+1}+\cdots+S_{m+7}$의 값이 최소가 되는 m의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

쉬준-68

87) 201번 변형

자연수 n에 대하여 2^n+3^n을 10으로 나눈 나머지를 a_n으로 하는 수열 $\{a_n\}$과 4^n+7^n을 10으로 나눈 나머지를 b_n으로 하는 수열 $\{b_n\}$이 있다. $c_n=2a_n-b_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{m} c_n > 100$을 만족하는 m의 최솟값은? [4점]

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

6-4

88) 202번 변형

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=a_n+3 \\ a_{3n}=2a_n+1 \\ a_{3n+1}=-a_n-1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{26}+a_{27}+a_{28}$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-76

89) 203번 변형

모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{3n-1}=-a_n-1$
(나) $a_{3n}=4a_n$
(다) $a_{3n+1}=-a_n+1$

$a_9=32$일 때, $\sum_{n=1}^{364} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

6-4

90) 204번 변형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n-2}{2} & (a_n\text{이 짝수}) \\ 2a_n+2 & (a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

이고, $a_5=4$일 때, a_1의 값으로 가능한 모든 값의 합은? [4점]

① 118 ② 120 ③ 122
④ 124 ⑤ 126

쉬준-71

91) 205번 변형
모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_3=8$이고

$$a_{n+2}=\sum_{k=a_n}^{a_{n+1}}(2k+1)\ (n\geq 1)$$

이다. $\sum_{n=1}^{4}a_n$의 값을 구하시오. [4점]
쉬준-76

92) 206번 변형
$a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\{\log_2\left|(a_n)^2-2n^2\right|\text{의 정수 부분}\}$$

이라 하자. $a_k=k-3$을 만족하는 10이하의 자연수 k의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5
쉬준-78

93) 207번 변형

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=2a_{2n-1},\ a_{2n+1}={a_{2n}}^2$$

를 만족시킨다. $a_{10}\times a_{12}\times\cdots\times a_{18}=t$라고 할 때, $\log_2 t$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-79

94) 208번 변형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+5}-a_n=k$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{5}a_n=1$, $\sum_{n=1}^{100}a_n=970$일 때, k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

쉬준-91

95) 209번 변형

n이 자연수일 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}-a_{2n-1}+a_n=n^2+n$ (나) $a_{2n+1}-a_{2n}=n+1$

a_8의 값은? [4점]

① 35 ② 37 ③ 39
④ 41 ⑤ 43

쉬준-80

96) 210번 변형

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=6$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 3-\dfrac{6}{a_n} & (a_n\text{이 } 0\text{이 아닌 정수인 경우}) \\ 3 & (a_n\text{이 } 0 \text{ 또는 정수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{55} a_n$의 값은? [4점]

① 70 ② 80 ③ 90
④ 100 ⑤ 110

쉬준-92

수학I 정답&풀이

1) 정답 15

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\sqrt[3]{-432}=-\sqrt[3]{2^4\times3^3}$ 이므로

$\sqrt[3]{-432}+\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{b}=0$

$\sqrt[3]{a^2\times b}=\sqrt[3]{2^4\times3^3}$

$a^2\times b=2^4\times3^3$

$a=1$이면 $b=432$ ⇨ $a+b=433$

$a=2$이면 $b=108$ ⇨ $a+b=110$

$a=3$이면 $b=48$ ⇨ $a+b=51$

$a=4$이면 $b=27$ ⇨ $a+b=31$

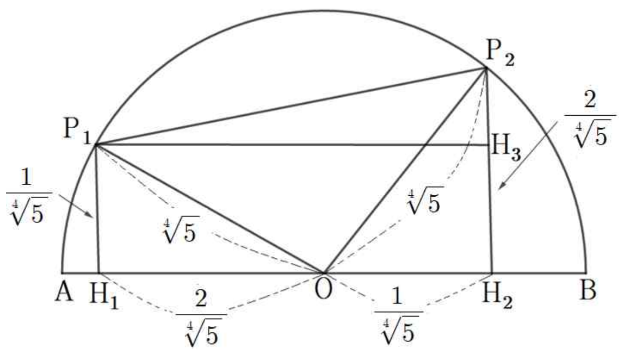
$a=6$이면 $b=12$ ⇨ $a+b=18$

$a=12$이면 $b=3$ ⇨ $a+b=15$

따라서 $a+b$의 최솟값은 15이다.

2) 정답 29

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]



그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt[4]{5}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OP_1}}=\overline{\mathrm{OP_2}}=\sqrt[4]{5}$

$\overline{\mathrm{OH_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP_1}}^2-\overline{\mathrm{P_1H_1}}^2}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{5}}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$

$\overline{\mathrm{OH_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP_2}}^2-\overline{\mathrm{P_2H_2}}^2}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\dfrac{4}{\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

따라서

$\overline{\mathrm{P_1H_3}}=\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}}$

$\overline{\mathrm{P_2H_3}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

삼각형 $\mathrm{P_1H_3P_2}$의 넓이는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P_1H_3}}\times\overline{\mathrm{P_2H_3}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}}\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

따라서 $S^2=\dfrac{9}{20}$

$p=20$, $q=9$이므로 $p+q=29$

3) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$3^{2x}=\left(\dfrac{625}{9}\right)^y=25$

$25^{\frac{1}{x}}=3^2$ ⇨ $5^{\frac{1}{x}}=3$

$25^{\frac{1}{y}}=\left(\dfrac{25}{3}\right)^2$ ⇨ $5^{\frac{1}{y}}=\dfrac{25}{3}$

$5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=25$

$5^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\dfrac{9}{25}$

$\left(5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=25^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\left(5^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\right)^2=\left(\dfrac{9}{25}\right)^2$

$5^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\dfrac{81}{625}$

$5^{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=5^{\frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}}=5^{-\frac{(x-y)(x+y)}{x^2y^2}}=\dfrac{81}{625}$

$5^{\frac{(x-y)(x+y)}{x^2y^2}}=\dfrac{625}{81}$

$5^{\frac{(x-y)(x+y)}{4x^2y^2}}=\dfrac{5}{3}$

4) 정답 8

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=-x^2+2\sqrt{a}x+3a$라 하자.
로그 진수의 조건 $f(x)>0$
$f(x)=-x^2+2\sqrt{a}x+3a$
$\quad =-(x-\sqrt{a})^2+4a$
$\log_2(-x^2+2\sqrt{a}x+5a)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 9이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=2$, $y=2^2$, $y=2^3$, $y=2^4$와 각각 2개씩 만나고, $y=2^5$와 한 점에서 만나야 한다.
따라서 $4a=32$에서 $a=8$이다.

5) 정답 12
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$a^{a-b}=b^{36}\to a-b=36\log_a b$
$b^{a-b}=a^4\to a-b=4\log_b a$
따라서
$36\log_a b=4\log_b a\to\ (\log_a b)^2=\frac{1}{9}$
$\therefore\ \log_a b=\pm\frac{1}{3}$이다.
$a-b>0$이므로 $a-b=36\log_a b=36\times\frac{1}{3}=12$이다.

6) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$36=2^2\times 3^2$이므로 양의 약수의 개수는 9이고 모든 양의 약수를 크기가 작은 순으로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.

k	a_k	$f(a_k)$	$\frac{a_k}{f(a_k)}$
1	$a_1=1$	1	1
2	$a_2=2$	2	1
3	$a_3=3$	2	$\frac{3}{2}$
4	$a_4=4$	3	$\frac{4}{3}$
5	$a_5=6$	4	$\frac{3}{2}$
6	$a_6=9$	3	3
7	$a_7=12$	6	2
8	$a_8=18$	6	3
9	$a_9=36$	9	4

$\sum_{n=1}^{9}\log_{36}\frac{a_n}{f(a_n)}$
$=\log_{36}\left(1\times1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times3\times2\times3\times4\right)$
$=\log_{36}(2^3\times3^3)=\log_{6^2}6^3=\frac{3}{2}$

7) 정답 199
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)$은 $\log_2 x$의 소수부분이며 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 $\log_2 n$의 정수 부분이 바뀌기 직전인 $n-1$일 때, 1에 근접한다는 사실을 알 수 있다. 또한, $2^{n_1}<2^{n_2}$일 때, $f(2^{n_1}-1)<f(2^{n_2}-1)$임을 알 수 있다.
$\log_2 8=3$이므로 $A=\log_2 7-2$이다.
$\log_2 64=6$이므로 $B=\log_2 63-5$이다.
$\log_2 512=9$이므로 $C=\log_2 511-8$이다.
따라서
$C-B-A$
$=(\log_2 511-8)-(\log_2 63-5)-(\log_2 7-2)$
$=\log_2 511-\log_2 63-\log_2 7-1$
$=\log_2\left(\frac{511}{63\times7}\right)-1$
$=\log_2\frac{73}{63}-\log_2 2$

$=\log_2\frac{73}{126}$

따라서 $2^{C-B-A}=\frac{73}{126}$

$\therefore\ p=126,\ q=73$

$p+q=199$

8) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$y=-x^2+\frac{9}{4}\log_b a$

$\rightarrow\ y'=-2x$

$\rightarrow\ y'_{x=\frac{3}{2}\sqrt{\log_b a}}=-3\sqrt{\log_b a}$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-3\sqrt{\log_b a}\left(x-\frac{3}{2}\sqrt{\log_b a}\right)$

$=-3\sqrt{\log_b a}\,x+\frac{9}{2}\log_b a\cdots$㉠

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\log_b a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{9}{2}\log_b a\right)$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{3}{2}\sqrt{\log_b a}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\frac{9}{2}\log_b a$이다.

ㄱ.

$x>1$일 때 $x>\sqrt{x}$이 성립한다.

따라서 $a>b>1$이므로 $\log_b a>1$에서

$\log_b a>\sqrt{\log_b a}$이고

$3\overline{\mathrm{OA}}=\frac{9}{2}\sqrt{\log_b a}$에서 $\frac{9}{2}\log_b a>\frac{9}{2}\sqrt{\log_b a}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}>3\overline{\mathrm{OA}}$ (참)

ㄴ.

$y=-3\sqrt{\log_b a}\,x+\frac{9}{2}\log_b a\cdots$㉠에 $\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$을 대입하면

$3=-\frac{15}{2}\sqrt{\log_b a}+\frac{9}{2}\log_b a$

에서 $\sqrt{\log_b a}=t\,(t>1)$이라 하고 식을 정리하면

$9t^2-15t-6=0$

$3t^2-5t-2=0$

$(3t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because t>1)$

따라서 $\sqrt{\log_b a}=2$

그러므로 $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(0,18)$

$\overline{\mathrm{OB}}=6\overline{\mathrm{OA}}$ (거짓)

ㄷ.

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\log_b a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{9}{2}\log_b a\right)$에서

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{\log_b a}\times\frac{9}{2}\log_b a=\frac{27}{8}(\log_b a)^{\frac{3}{2}}=8$

$(\log_b a)^{\frac{3}{2}}=\frac{64}{27}$

$\sqrt{\log_b a}=\frac{4}{3}$

$\log_b a=\frac{16}{9}$

따라서 $a=b^{\frac{16}{9}}$이다.

a, b가 자연수이므로 $b=2^9,\ 3^9,\ 4^9,\ \cdots$일 때, a가 자연수가 된다.

따라서 b의 최솟값은 $2^9=512$이다. (참)

9) 정답 16

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

(나)에서 $\log\frac{x^3}{4}-\log\frac{5}{2\sqrt{x}}$은 정수이다.

$\log\frac{x^3}{4}-\log\frac{5}{2\sqrt{x}}$

$=\log\left(\frac{x^3}{4}\times\frac{2\sqrt{x}}{5}\right)$

$=\log\left(\frac{x^3\sqrt{x}}{10}\right)$

$=\frac{7}{2}\log x-1$

(가)에서

$7<\frac{7}{2}\log x<\frac{35}{4}$

$6<\frac{7}{2}\log x-1<\frac{31}{4}$

그러므로 $\frac{7}{2}\log x-1=7$이다.

$\therefore \log x = \dfrac{16}{7}$

$7\log x = 16$

10) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

상용로그 $\log A$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 n_1, α_1, 상용로그 $\log B$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 n_2, α_2라 하면

$\log A = n_1 + \alpha_1$, $\log B = n_2 + \alpha_2$

$\log A + \log B = (n_1 + n_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)$

$\log AB = 4 + 1 = 5$

$\therefore AB = 10^5$

$\therefore \log_3 \sqrt[5]{AB} = \log_3 \sqrt[5]{10^5} = \log_3 10 = \dfrac{1}{\log 3}$

11) 정답 25

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{9}$이고 공비가 $3^{\frac{2}{3}}$이므로

$a_n = \dfrac{1}{9} \times \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{n-1} = 3^{-2} \times 3^{\frac{2n-2}{3}} = 3^{\frac{2n-8}{3}}$

$\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$이므로

(i) $a_n = 3^{\frac{2n-8}{3}} \geq 1$인 n의 값의 범위는

$3^{\frac{2n-8}{3}} \geq 3^0$에서 $2n-8 \geq 0$, $n \geq 4$

즉, $a_3 < 1$, $a_4 \geq 1$

(ii) $a_n = 3^{\frac{2n-8}{3}} \geq 10$인 n의 값의 범위는

$3^{2n-8} \geq 10^3$에서

$n = 7$이면 $3^{2\times7-8} = 3^6 = 729$,

$n = 8$이면 $3^8 = 6561$이므로

$n \geq 8$

즉, $a_7 < 10$, $a_8 > 10$

수열 $\{a_n\}$은 증가하는 수열이므로

$a_1 = \dfrac{1}{9} < a_2 < a_3 < a_4 = 1 < a_5 < a_6$

$< a_7 < 10 < a_8 < a_9 < \cdots$

$\log a_n$의 정수부분이 b_n이므로

$b_1 = b_2 = b_3 = -1$

$b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$

$b_8 = 1$이고 $n \geq 8$일 때 $b_n \geq 1$

따라서

$n = 3$일 때, $\sum_{k=1}^{3} b_k = \sum_{k=1}^{3} (-1) = -3$

$n = 4$일 때, $\sum_{k=1}^{4} b_k = -3+0 = -3$

$n = 5$일 때, $\sum_{k=1}^{5} b_k = -3+0+0 = -3$

$n = 6$일 때, $\sum_{k=1}^{6} b_k = -3+0+0+0 = -3$

$n = 7$일 때, $\sum_{k=1}^{7} b_k = -3+0+0+0+0 = -3$

$n = 8$일 때, $\sum_{k=1}^{8} b_k = -3+0+0+0+0+1 = -2$

$\sum_{k=1}^{n} b_k = -3$을 만족하는 n은 3, 4, 5, 6, 7이므로

구하는 값은

$3+4+5+6+7 = 25$

12) 정답 3

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

직선 AB가 원 C 의 넓이를 이등분 하므로 직선 AB는 원 C의 중심을 지나는 직선이다.

따라서 두 점 A, B는 원 C의 지름의 양 끝점이다.

원 C 의 중심이 $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$이므로 두 점 A, B는 $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$에 대칭이다.

$\mathrm{A}(t, \log_a t)$라고 하면 $\mathrm{B}\left(\dfrac{10}{3} - t, -\log_a t\right)$이다.

점 B가 $y = \log_a x$위의 점이므로

$-\log_a t = \log_a\left(\dfrac{10}{3} - t\right)$

$\log_a \dfrac{1}{t} = \log_a\left(\dfrac{10}{3} - t\right)$

$\frac{1}{t}=\frac{10}{3}-t$

$t^2-\frac{10}{3}t+1=0$

$3t^2-10t+3=0$

$(3t-1)(t-3)=0$

$t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$이다.

따라서 점 $(3, \log_a 3)$이 원 C 위의 점이므로 대입하면

$C:\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{52}{9}$

$\left(3-\frac{5}{3}\right)^2+(\log_a 3)^2=\frac{52}{9}$

$(\log_a 3)^2=\frac{52-16}{9}=4$

$\therefore\ \log_a 3=2$

$a^2=3$

13) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$2\{\log_2 f(x)-1\}=\log_2\left\{f(x)+\frac{5}{4}\right\}$

$2\log_2 f(x)-2=\log_2\left\{f(x)+\frac{5}{4}\right\}$

$2\log_2 f(x)=2+\log_2\left\{f(x)+\frac{5}{4}\right\}$

$\log_2\{f(x)\}^2=\log_2 4+\log_2\left\{f(x)+\frac{5}{4}\right\}$

$\log_2\{f(x)\}^2=\log_2\{4f(x)+5\}$

$\{f(x)\}^2-4f(x)-5=0$

$\{f(x)+1\}\{f(x)-5\}=0$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=5$

한편, 이차함수 $f(x)=a(x-2)^2+k$ $(a>0, 0<k<5)$에서

$f(x)=5$의 서로 다른 실근을 α, β라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=2$에서

$\alpha+\beta=4$

$f(x)>0$이므로 $f(x)=-1$의 근은 존재하지 않는다.

방정식 $2\{\log_2 f(x)-1\}=\log_2\left\{f(x)+\frac{5}{4}\right\}$의 서로 다른 모든 실근의 합은 4이다.

14) 정답 156

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(2k-1, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2k-2$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이가 $2k-2$이다.

두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_a(2k-x)$은 $x=k$에 대칭이므로

꼭짓점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}=\frac{2\mathrm{k}-2}{2}=k-1$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $(k, k-1)$이다. …㉠

꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(2k-1, 0)$, $\mathrm{C}(k, k-1)$인 직각이등변 삼각형 ABC의 내부의 격자점중 y좌표 q의 값으로 가능한 수는 1부터 $k-2$까지 이다.

(i) $q=1$일 때,

$y=1$가 변 AC와 만나는 점의 좌표는 $(2, 1)$, 변 BC와 만나는 점의 좌표는 $(2k-2, 1)$

따라서 p의 값으로 가능한 자연수는 3부터 $2k-3$까지이다.

$\therefore\ 2k-5$개

(ii) $q=2$일 때,

$y=2$가 변 AC와 만나는 점의 좌표는 $(3, 2)$, 변 BC와 만나는 점의 좌표는 $(2k-3, 2)$

따라서 p의 값으로 가능한 자연수는 4부터 $2k-4$까지이다.

$\therefore\ 2k-7$개

$\vdots\qquad\vdots$

(k-2) $q=k-2$일 때

$y=k-2$가 변 AC와 만나는 점의 좌표는 $(k-1, k-2)$, 변 BC와 만나는 점의 좌표는 $(k+1, k-2)$

따라서 p의 값으로 가능한 자연수는 k뿐이다.

$\therefore$ 1개

(i)~(k-2)에서 격자점 (p, q)의 개수는 첫째항이 1, 항수가 $k-2$, 끝항이 $2k-5$인 등차수열의 합을 나타내므로

$\dfrac{(k-2)\{1+(2k-5)\}}{2}=(k-2)^2$이다.

$(k-2)^2=100$에서 $k=12$이다.

한편, ㉠에서 $(k,\ k-1)=(12,\ 11)$이 $y=\log_a x$위의 점이므로

$11=\log_a 12$

$a^{11}=12$

$\therefore\ a^{22}=144$

$a^{22}+k=144+12=156$

15) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프는 $y=\log_2 x+2$이다.

$y=\log_2 x+2$의 $y=x$에 대칭이동한 함수는 $y=2^{x-2}$이다.

따라서 $f(x)=2^{x-2}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d이라 하면

$a_6=a_2+8\rightarrow 4d=8$에서 $d=2$이다. $a_1=4$이므로

따라서 $a_n=2n+2$

$f(a_n)=f(2n+2)=2^{2n}=4^n$

$f(a_1)\times f(a_2)\times\cdots\times f(a_{10})$

$=4^{1+2+3+\cdots+10}=4^{55}=2^{110}$

따라서 $k=2^{110}$

$\log_2 k=\log_2 2^{110}=110$

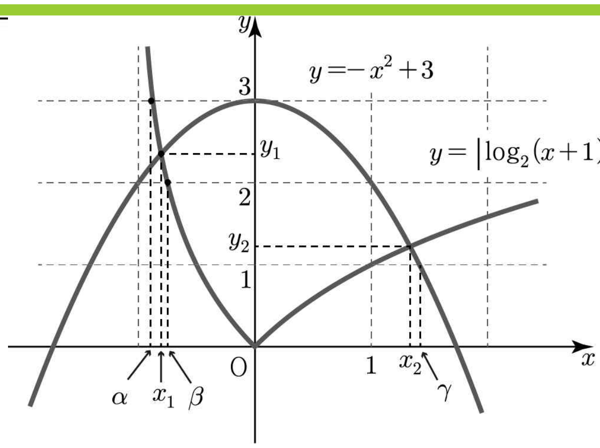
16) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

$y=|\log_2(x+1)|=\begin{cases}\log_2(x+1) & (x\geq 0)\\ -\log_2(x+1) & (-1<x<0)\end{cases}$ 에서

$f_1(x)=\log_2(x+1)$, $f_2(x)=-\log_2(x+1)$, $g(x)=-x^2+3$이라 하자.



ㄱ. $2<y_1<3$이므로

(i) $y=f_2(x)$와 $y=3$의 교점의 x좌표를 α라 할 때, $\alpha<x_1$이다.

$-\log_2(x+1)=3$

$\log_2(x+1)=-3$

$x+1=\dfrac{1}{8}\ \rightarrow\ \alpha=-\dfrac{7}{8}$

(ii) $y=f_2(x)$와 $y=2$의 교점의 x좌표를 β라 할 때, $x_1<\beta$이다.

$-\log_2(x+1)=2$

$\log_2(x+1)=-2$

$x+1=\dfrac{1}{4}\ \rightarrow\ \beta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ -\dfrac{7}{8}<x_1<-\dfrac{3}{4}$ (ㄱ. 참)

ㄴ. $1<y_2<2$이고 $f_1(1)=1$, $g(1)=2$이므로

(i) $y=g(x)$와 $y=1$의 교점의 x좌표를 γ라 할 때, $x_2<\gamma$이다.

$-x^2+3=1$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}\ \rightarrow\ \gamma=\sqrt{2}$

(ii) $y=f_1(x)$와 $y=1$의 교점은 $x=1$이므로

$\therefore\ 1<x_2<\sqrt{2}$ (ㄴ, 참)

ㄷ.

두 점 $(0,\ 3)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 기울기는 두 점 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$을 지나는 직선의 기울기 -1보다 작다.

즉, $\frac{y_2-3}{x_2-0}<-1$이고 $x_2>0$이므로 $y_2-3<-x_2$

이다.

따라서 $x_2+y_2<3$

또한. 두 점 $(0,3)$, (x_2,y_2)을 지나는 직선의 기울기는 두 점 $(0,3)$, $(1,1)$을 지나는 직선의 기울기 -2보다 크다.

즉, $-2<\frac{y_2-3}{x_2-0}$이고 $x_2>0$이므로 $-2x_2<y_2-3$

이다.

따라서 $3<2x_2+y_2$

그러므로 $x_2+y_2<3<2x_2+y_2$ (ㄷ. 참)

[다른 풀이]-이지웅T

ㄷ.

$y_2=-x_2^2+3$에서

$x_2+y_2=x_2-x_2^2+3=x_2(1-x_2)+3$

ㄴ.에서 $1-x_2<0$이므로 $x_2(1-x_2)+3<3$

따라서 $x_2+y_2<3$

또한 $2x_2+y_2=2x_2-x_2^2+3=x_2(2-x_2)+3$

ㄴ.에서 $2-x_2>0$이므로 $x_2(2-x_2)+3>3$

따라서 $3<2x_2+y_2$

그러므로 $x_2+y_2<3<2x_2+y_2$ (ㄷ. 참)

17) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$3^x=4^y=a^z=k$ $(k\neq1)$로 놓으면

$3=k^{\frac{1}{x}}$, $4=k^{\frac{1}{y}}$, $a=k^{\frac{1}{z}}$

ㄱ. $k>1$일 때, $a>4$이므로 $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$에서

$z<y<x$

그런데 $0<k<1$일 때는 $a>4$이므로

$\frac{1}{z}<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<0$ 에서

$z>y>x$ (거짓)

ㄴ. $3=k^{\frac{1}{x}}$, $4=k^{\frac{1}{y}}$을 변끼리 곱하면

$a=12=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{x+y}{xy}}=k^{\frac{1}{z}}$

$k\neq1$이므로 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{z}$

$\therefore\ \frac{xy}{x+y}=z$ (참)

ㄷ. $a=k^{\frac{1}{z}}$에서 $a=12^{-1}$이므로 $a=k^{-\frac{1}{z}}$

$3=k^{\frac{1}{x}}$, $4=k^{\frac{1}{y}}$을 변끼리 곱하면

$12=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{-\frac{1}{z}}$

$\therefore\ \frac{1}{y}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}$

$x=p$, $z=\sqrt{p}$이면

$\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{p}-\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{-\sqrt{p}-1}{p}$

$y=-\frac{p}{\sqrt{p}+1}=-\frac{p(\sqrt{p}-1)}{p-1}$

$\therefore\ y=\frac{p(1-\sqrt{p})}{p-1}$ (참)

18) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

B_1의 y좌표가 1이므로

$\frac{1}{5}\times a^x=1\rightarrow a^x=5\rightarrow x=\log_a 5$

$\therefore\ B_1(\log_a 5,\,1)$

따라서 A_2의 x좌표가 $\log_a 5$이므로

$a^{\log_a 5}=5$

$\therefore\ A_2(\log_a 5,\,5)$

한편, $y=\left(\frac{1}{5}\right)\times a^x=a^{\log_a\left(\frac{1}{5}\right)}\times a^x=a^{x-\log_a 5}$

이므로 $y=\left(\frac{1}{5}\right)\times a^x$은 $y=a^x$을 x축으로 $\log_a 5$만큼 평행 이동한 그래프이다.

따라서 두 선분 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ 및 두 곡선 $y=a^x$, $y=\left(\frac{1}{5}\right)\times a^x$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로의 길이 $\log_a 5$, 세로의 길이 4인 직사각형 $A_1B_1A_2C$ 넓이와 같다.

$\therefore\ \log_a 5 \times 4 = 20$

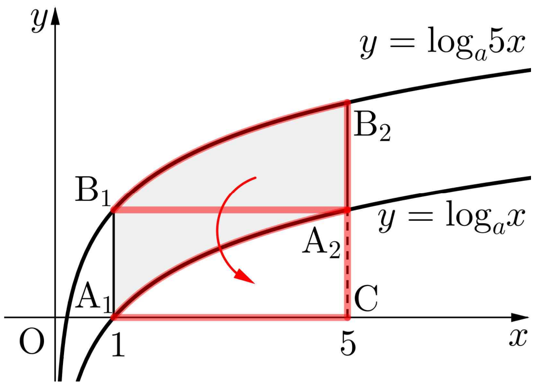
$\therefore\ a^2 = 5$

따라서 $a = \sqrt{5}$

19) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이현일T]



B_1의 x좌표가 1이므로

$\therefore\ B_1(1, \log_a 5)$

따라서 A_2의 y좌표가 $\log_a 5$이므로

$\log_a 5 = \log_a x$에서 $x = 5$

$\therefore\ A_2(5, \log_a 5)$

한편, $y = \log_a 5x = \log_a x + \log_a 5$

이므로 $y = \log_a 5x$은 $y = \log_a x$을 y축으로 $\log_a 5$만큼 평행 이동한 그래프이다.

따라서 다음 그림과 같이 두 선분 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ 및 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = \log_a 5x$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로의 길이 $4(5-1)$, 세로의 길이 $\log_a 5$인 직사각형 $A_1B_1A_2C$ 넓이와 같다.

$\therefore\ 4 \times \log_a 5 = 8$

$\therefore\ \log_a 5 = 2$

따라서 $a = \sqrt{5}$

20) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에서

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} = 2R$$

$$\therefore\ R = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

따라서 외접원의 둘레의 길이는

$$2 \times \pi \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 4\sqrt{2}$$

21) 정답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에서

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{R}$$

$$\therefore\ R = \frac{3}{2\pi}$$

따라서 외접원의 둘레의 길이는 $2 \times \pi \times \dfrac{3}{2\pi} = 3$

22) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

부채꼴의 넓이 $S = \dfrac{1}{2}rl$에서 부채꼴 ODE는 $S = 6\pi$, $l = 2\pi$이므로

$$6\pi = \frac{1}{2}r \times 2\pi \rightarrow r = 6$$

$$\therefore\ \overline{OD} = \overline{OE} = 6$$

$l = r\theta$에서 $2\pi = 6 \times \theta \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore\ \angle DOE = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 ODC에서 $\overline{OC} = 12$

직각삼각형 OCA에서 $\overline{OA} = 24$이다.

따라서 호 AB의 길이는 $24 \times \dfrac{\pi}{3} = 8\pi$이다.

23) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$은 원점을 지나고 기울기가 $\tan\dfrac{\pi}{6}$인 직선이므로 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$이다.

$4\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{6}+\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)$ (n은 정수)

따라서 $5\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$이고

$\theta=\dfrac{2}{5}n\pi+\dfrac{\pi}{15}=\dfrac{6n+1}{15}\pi$

$0<\theta<2\pi$이므로

$0<\dfrac{6n+1}{15}\pi<2\pi$

$0<(6n+1)\pi<30\pi$

$-\pi<6n\pi<29\pi$

$-\dfrac{1}{6}<n<\dfrac{29}{6}$이고 n은 정수이므로

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서

$\theta=\dfrac{1}{15}\pi,\ \dfrac{7}{15}\pi,\ \dfrac{13}{15}\pi,\ \dfrac{19}{15}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$이고

모든 θ값 중 가장 큰 값은 $\dfrac{5}{3}\pi$이다.

24) 정답 ④

[출제 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

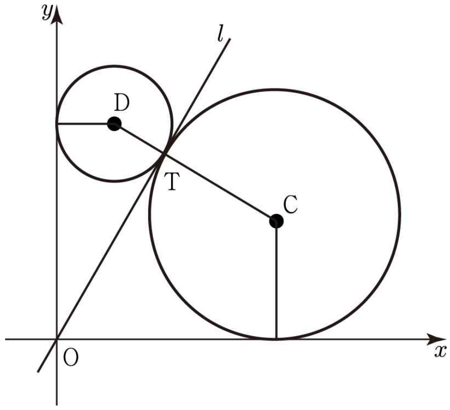
두 직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$와 $y=-\sqrt{3}x$는 기울기 곱이 -1이므로 서로 수직이다.

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$의 기울기는 $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$이다.

즉, 직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$와 y축이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 $y=-\sqrt{3}x$와 y축이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$이다.

그러므로 문제의 상황을 원점을 중심으로 시계방향으로 30° 회전하면 다음 그림과 같이 원 C와 원 D의 중심이 모두 제1사분면에 위치하는 그림이 된다.



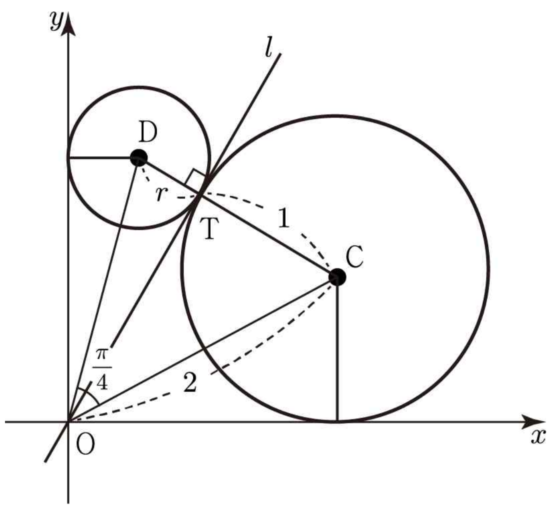
원의 크기는 변함이 없으므로 계산 편의상 회전한 그림에서 원 D의 반지름의 길이를 구하자.

원 C의 중심을 C, 원 D의 중심을 D, 원점을 O라 하자.

그림과 같이 원 C의 중심 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle\mathrm{TOH}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\angle\mathrm{TOC}=\angle\mathrm{COH}=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{DOT}=\dfrac{\pi}{12}$이고

$\angle\mathrm{DOC}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$이다.



직각삼각형 COH에서 $\angle\mathrm{COH}=\dfrac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{CH}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=2$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{3}$

직각삼각형 ODT에서 $\overline{\mathrm{OD}}^2=r^2+3\cdots$㉠

삼각형 COD에서 $\overline{\mathrm{CD}}=1+r$, $\overline{\mathrm{OC}}=2$,

$\angle\mathrm{OCD}=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{COD}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 사인법칙을 적용하

면 $\dfrac{\overline{OD}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{r+1}{\sin\frac{\pi}{4}}$

따라서 $\overline{OD}=(r+1)\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{3}{2}(r+1)^2=r^2+3$

$3r^2+6r+3=2r^2+6$

$r^2+6r-3=0$

$r=-3\pm2\sqrt{3}$

$r>0$이므로 $r=-3+2\sqrt{3}$

따라서 두 원 C와 D의 중심사이 거리

$\overline{CD}=r+1=2(\sqrt{3}-1)$

25) 정답 ①

[출제 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sin x\cos x}+\sqrt{\dfrac{1}{2}+\sin x\cos x}$

$=\dfrac{\sqrt{1-2\sin x\cos x}+\sqrt{1+2\sin x\cos x}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{\cos^{2x}\theta+\sin^2x-2\sin x\cos x}+\sqrt{\cos^2x+\sin^2x-2\sin x\cos x}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}+\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\cos x+\sin x+\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}$ $(\because$

$0<\sin x\le\cos x)$

$=\sqrt{2}\cos x$

$\therefore\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}$

따라서

$\sin2\alpha=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

26) 정답 3

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\cos^2\dfrac{\pi}{14}+\cos^2\dfrac{\pi}{7}+\cos^2\dfrac{5}{28}\pi$

$+\cos^2\dfrac{9}{28}\pi+\cos^2\dfrac{5}{14}\pi+\cos^2\dfrac{3}{7}\pi$

$=\cos^2\dfrac{2}{28}\pi+\cos^2\dfrac{4}{28}\pi+\cos^2\dfrac{5}{28}\pi$

$+\cos^2\dfrac{9}{28}\pi+\cos^2\dfrac{10}{28}\pi+\cos^2\dfrac{12}{28}\pi$

$\cos^2\dfrac{2}{28}\pi+\cos^2\dfrac{12}{28}\pi$

$=\cos^2\dfrac{2}{28}\pi+\cos^2\left(\dfrac{14}{28}\pi-\dfrac{2}{28}\pi\right)$

$=\cos^2\dfrac{2}{28}\pi+\sin^2\dfrac{2}{28}\pi=1$

같은 방법으로

$\cos^2\dfrac{4}{28}\pi+\cos^2\dfrac{10}{28}\pi=1$

$\cos^2\dfrac{5}{28}\pi+\cos^2\dfrac{9}{28}\pi=1$

따라서 $1+1+1=3$

27) 정답 82

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$y=\sin2x$는 주기가 π이고 $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{3}{4}\pi$,

$x=\dfrac{5}{4}\pi$, $x=\dfrac{7}{4}\pi$에서 극값을 갖고 극점은 각각

$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$, $\left(\dfrac{3}{4}\pi,-1\right)$, $\left(\dfrac{5}{4}\pi,1\right)$, $\left(\dfrac{7}{4}\pi,-1\right)$와 같다.

$y=\sin(nx)$가 $y=\sin2x$와 접하기 위해서는 4개의 극점을 지날 때이다.

그 중 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$을 $y=\sin(nx)$이 지나면 주기성에 의해 나머지 극점 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,-1\right)$, $\left(\dfrac{5}{4}\pi,1\right)$, $\left(\dfrac{7}{4}\pi,-1\right)$을 모두 지나므로 $1=\sin\dfrac{n}{4}\pi$을 만족하는 3이상의 자연수를 구하면 된다.

$\sin\dfrac{5}{2}\pi=1$, $\sin\dfrac{9}{2}\pi=1$, $\sin\dfrac{13}{2}\pi=1$, $\cdots$이므로

$\frac{n}{4}=\frac{5}{2}$에서 $n=10$

$\frac{n}{4}=\frac{9}{2}$에서 $n=18$

그러므로

$a_1=10$, $a_2=18$, $a_3=26$, $\cdots$

$10, 18, 26, \cdots$이다.

따라서 $a_k=8k+2$이다.

그러므로 $a_{10}=82$

28) 정답 ①

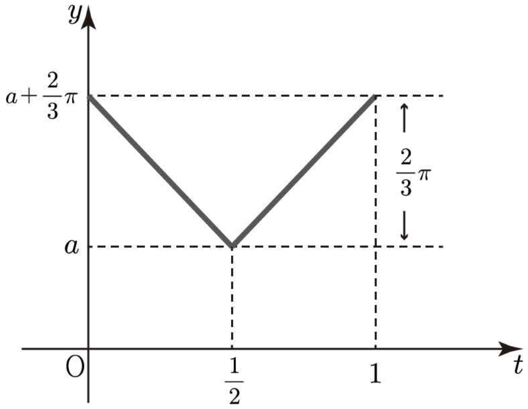
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

$0 \le x \le \pi$에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin x = t$라 두면

$g(t)=\frac{4}{3}\pi\left|t-\frac{1}{2}\right|+a$

$g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le \pi$에서 함수 $g(x)$는 $a \le g(x) \le a+\frac{2}{3}\pi$이고 함수 $f(x)$도 마찬가지로 $a \le f(x) \le a+\frac{2}{3}\pi$이다.

방정식 $\sin f(x)=\frac{1}{2}$를 만족하는 $f(x)=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \cdots$이다.

$f(x)$의 범위 $a \le f(x) \le a+\frac{2}{3}\pi$에서 구간의 길이는 $\frac{2}{3}\pi$이고 k의 값이 $0 \le a \le 3\pi$에서

$y=f(x)$는 $y=a$와 1개의 교점을 $y=a+\frac{2}{3}\pi$와 2개의 교점을 가진다.

(방정식 $\sin f(x)=\frac{1}{2}$의 해의 개수가 많기 위해서는 $y=f(x)$와 $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{5}{6}\pi$, $y=\frac{13}{6}\pi$, $y=\frac{17}{6}\pi$가 많은 점에서 만나야 한다.)

따라서 가능한 a의 값은 $\frac{\pi}{6}$와 $\frac{13}{6}\pi$이다.

그러므로 가능한 a의 값의 합 $S=\frac{\pi}{6}+\frac{13}{6}\pi=\frac{7}{3}\pi$ $\cdots$ ㉠

한편,

$a=\frac{\pi}{6}$일 때, $f(x)=\frac{4}{3}\pi\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|+\frac{\pi}{6}$이고

$\sin f(x)=\frac{1}{2}$을 만족하는 $f(x)=\frac{\pi}{6}$ 또는 $f(x)=\frac{5}{6}\pi$이다.

$f(x)=\frac{\pi}{6}$일 때, $\sin x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5}{6}\pi$로 2개다.

$f(x)=\frac{5}{6}\pi$일 때, $\sin x=0$ 또는 $\sin x=1$이므로 $x=0$, $x=\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$로 3개다.

$a=\frac{13}{6}\pi$일 때도 마찬가지이다.

따라서 $\sin f(x)=\frac{1}{2}$의 모든 해의 최대 개수 $M=2+3=5$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$M \times S=\frac{35}{3}\pi$

29) 정답 25

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$y=2^{x-2}+1$의 역함수는 $y=\log_2(x-1)+2$이므로 점근선은 $x=1$이다.

함수 $y=\tan\frac{2\pi}{a}x$에서 주기가 $\frac{\pi}{\frac{2\pi}{a}}=\frac{a}{2}$이므로

$x=\frac{a}{4}$가 y축에 가장 가까운 점근선이다.

주기가 $\frac{a}{2}$이므로 다음 점근선은 $x=\frac{a}{4}+\frac{a}{2}=\frac{3}{4}a$

다음 점근선은 $x=\frac{3}{4}a+\frac{a}{2}=\frac{5}{4}a$

따라서 $\frac{2n-1}{4}a=1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$a=\frac{4}{2n-1}$

이므로 $a_n=\frac{4}{2n-1}$이다.

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$

$=\sum_{n=1}^{10}\frac{2n-1}{4}$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{10}(2n-1)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{10(1+19)}{2}$

$=25$

30) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$y=a\cos(bx-c)+d$가 최댓값 1,
최솟값 -3이므로 $|a|=2$
$a>0$이므로 $a=2$, $d=-1$
$f(x)=2\cos(b\pi x-c)-1$의 주기는 4이다.

$b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b\pi}=4$에서 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x-c\right)-1$

이 그래프가 $(0, -3)$을 지나므로
$2\cos(-c)-1=-3$
$\cos(-c)=-1$ → $\cos(c)=-1$
$0<c<6\pi$에서 $c=\pi, 3\pi, 5\pi$

$a\sin\left(b\pi+\frac{cd}{6}\right)=-2$에서

$a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $d=-1$이므로

$2\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{c}{6}\right)=-\sqrt{3}$

$\cos\frac{c}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

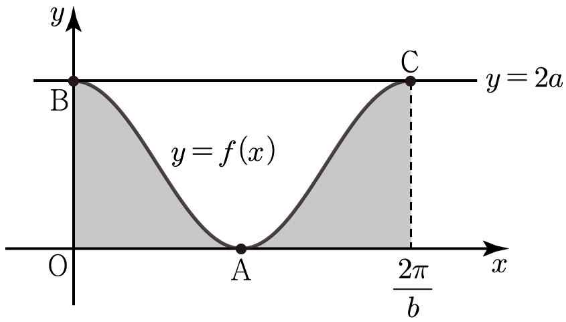
따라서 $c=5\pi$

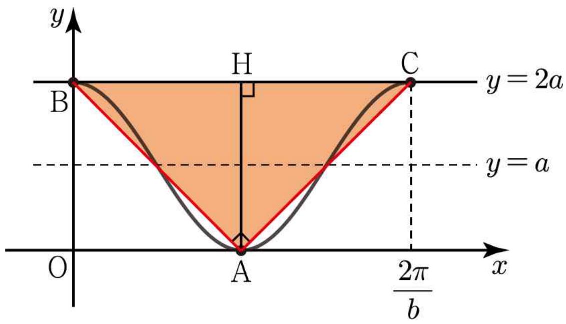
$\therefore$ $a=2, b=\frac{1}{2}, c=5\pi, d=-1,$

따라서 $a\times b\times c\times d=-5\pi$

31) 정답 ①
[그림 : 이정배T]

다음 그림과 같이 $\int_0^{\frac{2\pi}{b}}f(x)dx$가 나타내는 색칠된 부분의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 같다.





함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{b}$에 대칭이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$이므로

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 직각이등변삼각형이다.
따라서 꼭짓점 A에서 $y=2a$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=\overline{CH}=\overline{AH}=\frac{\pi}{b}$

$\overline{AH}=2a$이므로 $2a=\frac{\pi}{b}\cdots㉠$

따라서 $\overline{BC}=\dfrac{2\pi}{b}=4a$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times 4a\times 2a=16$에서

$a^2=4$

따라서 $a=2$ $(\because a>0)$이다.

㉠에서 $b=\dfrac{\pi}{4}$

그러므로 $a+b=2+\dfrac{\pi}{4}$

32) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)=\alpha\left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$f(\alpha)=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\cdots$㉠

$g^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)=\beta\left(0\le\beta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$g(\beta)=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore\cos\beta=\dfrac{1}{4}\cdots$㉡

㉠㉡에서 $\sin\alpha=\cos\beta$

이때 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$이므로

$\dfrac{\pi}{2}-\beta=\alpha$ $\quad\therefore\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

같은 방법으로 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{6}\right)=\gamma\left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$, $g^{-1}\left(\dfrac{1}{6}\right)=\delta\left(0\le\beta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

라 두면 $\gamma+\delta=\dfrac{\pi}{2}$이다.

그러므로

$f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{6}\right)+g^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)+g^{-1}\left(\dfrac{1}{6}\right)$

$=\alpha+\gamma+\beta+\delta=\pi$

$k=\pi$이므로 $f\left(\dfrac{k}{2}\right)+g\left(\dfrac{k}{3}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

33) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\sqrt{1-\cos^2x}=|\sin x|$이다.

따라서 $f(x)=\left(3^{\sin x}\right)^2-3^{|\sin x|}+1$

$0\le x\le\pi$이므로 $0\le\sin x\le 1$이다.

따라서 $|\sin x|=\sin x$

$f(x)=\left(3^{\sin x}\right)^2-3^{\sin x}+1$에서

$3^{\sin x}=t$라 두면 $1\le t\le 3$이고

$f(x)=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$t=1$일 때 최솟값 1

$t=3$일 때 최댓값 7

34) 정답 6

$g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$

따라서

$$h(x)=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{g\left(\frac{\pi}{3}f(\pi-x)\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)}$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)$$

$\sin x=t$라 두면 $-1\le t\le 1$이므로

$-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{3}t\le\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\tan\dfrac{\pi}{3}t\le\tan\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 $M=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $m=\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

$M^2+m^2=3+3=6$

35) 정답 4

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$x+\dfrac{\pi}{3}=\theta$라 두면 $x=\theta-\dfrac{\pi}{3}$이므로

$f\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos^2\theta+2\cos\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)+k-2$

$=\cos^2\theta-2\sin\theta+k-2$

$=1-\sin^2\theta-2\sin\theta+k-2$

$=-\sin^2\theta-2\sin\theta-1+k$

$=-(\sin\theta+1)^2+k$

$\sin\theta=1$일 때, 최솟값이 $k-4$이므로 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)\geq 0$가 성립하기 위해서는 $k-4\geq 0$이다.

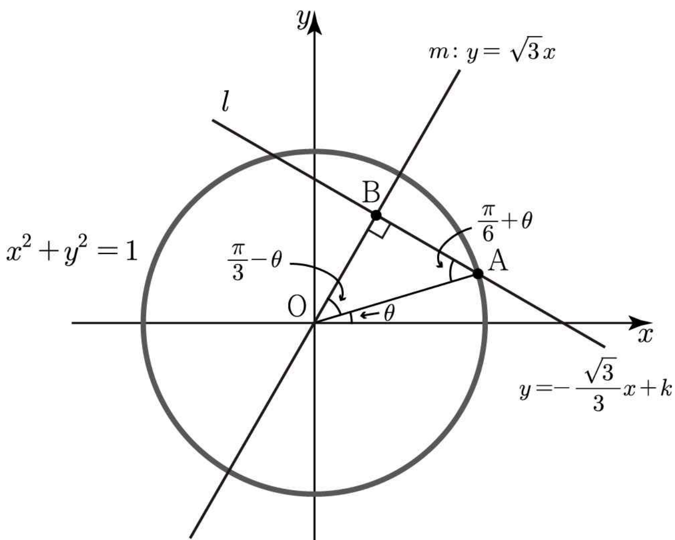
따라서 $k\geq 4$

36) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선을 m이라 하자. 직선 m : $y=\sqrt{3}x$는 직선 직선 l과 수직이다. 두 직선의 교점을 B라 하면 직선 OB는 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\angle\mathrm{BOA}=\frac{\pi}{3}-\theta$



직각삼각형 OBA에서 $\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\cos(\angle\mathrm{BOA})=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

원점 O에서 직선 l까지의 거리가 $\overline{\mathrm{OB}}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은 $\sqrt{3}x+3y-3k=0$에서

$\frac{|-3k|}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \rightarrow\ 3k=2$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

한편, 피타고라스 정리로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OB}}^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

직각삼각형 OAB에서 $\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{6}+\theta$이므로

$\cos(\angle\mathrm{OAB})=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $k\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

37) 정답 4

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$|\sin kt|x^2-2tx+4\pi t=0$이 중근을 가지므로 $\frac{D}{4}=0$이다.

따라서 $t^2-4\pi t|\sin kt|=0$, $t(t-4\pi|\sin kt|)=0$에서

$t=0$ 또는 $\frac{t}{4\pi}=|\sin kt|$

$t>0$이므로 $y=\frac{1}{4\pi}t$와 $y=|\sin kt|$의 교점의 개수가 31이면 된다. (교점이 x축 위의 점이 아니므로 이차방정식이 되는 조건인 $|\sin kt|\neq 0$을 만족한다.)

직선 $y=\frac{1}{4\pi}t$는 원점과 $(4\pi, 1)$을 지난다.

$k=1$일 때, $y=|\sin t|$는 $t>0$에서 $y=\frac{1}{4\pi}t$와 7개의 교점을 가진다.

$k=2$일 때, $y=|\sin 2t|$는 $t>0$에서 $y=\frac{1}{4\pi}t$와 15개의 교점을 가진다.

$k=4$일 때, $y=|\sin 4t|$는 $t>0$에서 $y=\frac{1}{4\pi}t$와 31개의 교점을 가진다.

그러므로 $k=4$

38) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(n)$의 값은 $\tan(2nx)=\frac{1}{n}$ $\left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)$의 모든 실근의 합이다.

우선 $0\le 2nx<n\pi$이고 $\tan\alpha_n=\frac{1}{n}$ $\left(0<\alpha_n<\frac{\pi}{2}\right)$이라 놓으면

$2nx=\alpha_n, \pi+\alpha_n, 2\pi+\alpha_n, \cdots, (n-1)\pi+\alpha_n$

따라서 모든 실근은

$x=\frac{\alpha_n}{2n}+\frac{k\pi}{2n}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, (n-1))$이다.

그러므로

$f(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha_n}{2n}+\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=\frac{\alpha_n}{2n}\times n+\frac{\pi}{2n}\times\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{\alpha_n}{2}+\frac{(n-1)\pi}{4}$

$\tan\{2f(n)\}$

$=\tan\left\{\alpha_n+\frac{(n-1)\pi}{2}\right\}$

$=\begin{cases}-\frac{1}{\tan\alpha_n} & (n:\text{짝수})\\ \tan\alpha_n & (n:\text{홀수})\end{cases}$

$=\begin{cases}-n & (n:\text{짝수})\\ \frac{1}{n} & (n:\text{홀수})\end{cases}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}n\tan\{2f(n)\}$

$=-\sum_{k=1}^{5}(2k)^2+\sum_{n=1}^{5}1$

$=-4\times\frac{5\times6\times11}{6}+5$

$=-220+5$

$=-215$

39) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

근과 계수와의 관계에서

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=k$ $\cdots㉠$

$\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{4}k^2$ $\cdots㉡$

㉠에서 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=k$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=k\sin\theta\cos\theta$

양변을 제곱하여 정리하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=k^2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$1+\frac{8}{k^2}=\frac{16}{k^2}$ $(\because ㉡)$

$\frac{8}{k^2}=1$

$k^2=8$

㉠에서 $k>0$이므로 $k=2\sqrt{2}$

40) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

삼차방정식의 좌변을 $f(x)$라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법으로 인수분해 하면

$(x-1)\{x^2-(2\cos\theta)x-3\sin^2\theta+5\sin\theta-1\}=0$

중근은 한 개의 근으로 보지 않으므로

$x^2-(2\cos\theta)x-3\sin^2\theta+5\sin\theta-1=0$이 실근이 없어야 한다.

$D/4=\cos^2\theta+3\sin^2\theta-5\sin\theta+1$

$\quad=2\sin^2\theta-5\sin\theta+2<0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2<0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)<0$

$\frac{1}{2}<\sin\theta<2$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$6\alpha+12\beta=\pi+10\pi=11\pi$

41) 정답 16

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$|\cos 2x|=t$라 두면 $0 \le t \le 1$이고
$f(|f(2x)|)=f(|\cos 2x|)=f(t)=\cos t=k$을 만족하는
$t=t_1$ $(0<t_1<1)$이라 하자.
따라서 $|\cos 2x|=t_1$
$\cos 2x=\pm t_1$
$\cos 2x=t_1$의 $0 \le x<\pi$에서의 두 근을 α_1, α_2라 두면 두 근은 $\frac{\pi}{2}$에 대칭이므로 $\alpha_1+\alpha_2=\pi$
$\cos 2x=t_1$의 $\pi \le x<2\pi$에서의 두 근을 α_3, α_4라 두면 두 근은 $\frac{3}{2}\pi$에 대칭이므로 $\alpha_3+\alpha_4=3\pi$
$\cos 2x=-t_1$의 $0 \le x<\pi$에서의 두 근을 β_1, β_2라 두면 두 근은 $\frac{\pi}{2}$에 대칭이므로 $\beta_1+\beta_2=\pi$
$\cos 2x=-t_1$의 $\pi \le x<2\pi$에서의 두 근을 β_3, β_4라 두면 두 근은 $\frac{3}{2}\pi$에 대칭이므로 $\alpha_3+\alpha_4=3\pi$

따라서 모든 근의 개수는 8이고 모든 해의 합은 8π이다.
그러므로 $a=8$, $b=8$로 $a+b=16$

42) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=2\sin(ax)+b$가 $A(\pi, k)$, $B(3\pi, k)$을 지나므로 $\sin(\pi a)=\sin(3\pi a)$이 성립한다.
$0<a<1$에서 $-\frac{2}{9}\pi<-\frac{\pi}{4}a<0$, $0<\frac{9}{4}\pi a<2\pi$이다.
따라서
$3\pi a=(2n-1)\pi-\pi a$ 또는 $3\pi a=2n\pi+\pi a$
(i) $3\pi a=(2n-1)\pi-\pi a$ $\rightarrow$ $4\pi a=(2n-1)\pi$ $\rightarrow$ $a=\frac{2n-1}{4}$
(ii) $3\pi a=2n\pi+\pi a$ $\rightarrow$ $2\pi a=2n\pi$ $\rightarrow$ $a=n$

$\frac{1}{2}<a<1$을 만족하는 a는 $n=2$일 때, $a=\frac{3}{4}$이다.
따라서
$f(x)=2\sin\frac{3}{4}x+b$
$f\left(\frac{10}{9}\pi\right)=-1$이므로 $2\sin\frac{5}{6}\pi+b=1+b=-1$에서 $b=-2$
$f(x)=2\sin\frac{3}{4}x-2$
따라서
$k=f(\pi)=2\sin\frac{3}{4}\pi-2=\sqrt{2}-2$이다.

43) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 최성훈T]

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4$
직각삼각형 ABC의 빗변의 중점 M은 외접원의 중심이므로 $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2$이다.
직각삼각형 ABC에서
$\sin(\angle ABC)=\sin(\angle ABM)=\frac{\sqrt{7}}{4}$
$\sin(\angle ACB)=\sin(\angle ACM)=\frac{3}{4}$
삼각형 ABM의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면
$\frac{\overline{AM}}{\sin(\angle ABM)}=2R_1 \rightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R_1$
$\therefore\ R_1=\frac{4}{\sqrt{7}}$
따라서 $S_1=\frac{16}{7}\pi$

삼각형 ACM의 외접원의 반지름의 길이를 R_2이라 하면
$\frac{\overline{AM}}{\sin(\angle ACM)}=2R_2 \rightarrow \frac{2}{\frac{3}{4}}=2R_2$
$\therefore\ R_2=\frac{4}{3}$

따라서 $S_2=\dfrac{16}{9}\pi$

그러므로 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{7}$

44) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

원의 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{2}$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ACB})}=2R \rightarrow \dfrac{2}{\sin(\angle\mathrm{ACB})}=3$

따라서 $\sin(\angle\mathrm{ACB})=\dfrac{2}{3}$

삼각형 CPQ에서 사인법칙을 적용하면

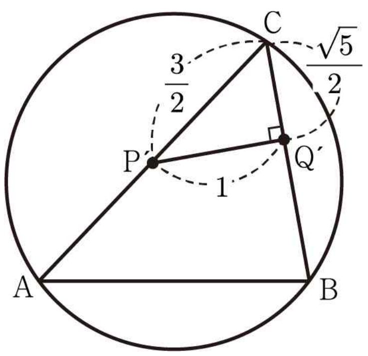
$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{PCQ}$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin(\angle\mathrm{PQC})}=\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{PCQ})}$

$\rightarrow \dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin(\angle\mathrm{PQC})}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

따라서 $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{3}{2}\times\sin(\angle\mathrm{PQC})$

$\overline{\mathrm{PC}}$가 최대이기 위해서는 $\angle\mathrm{PQC}=\dfrac{\pi}{2}$일 때다.



$\overline{\mathrm{PQ}}=1$이면서 $\overline{\mathrm{PC}}$가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P′, Q′이라 하자.

따라서 구하려는 삼각형 CPQ의 넓이는 직각삼각형 CP′Q′의 넓이이다.

$\overline{\mathrm{CP'}}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{P'Q'}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{CQ'}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}-1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 CP′Q′의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

45) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이가 13π이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{13}{2}$이다.

삼각형 ABC에서 $\dfrac{a}{\sin A}=13\rightarrow\sin A=\dfrac{a}{13}$

따라서 $\cos A=\dfrac{\sqrt{169-a^2}}{13}$ $(\because 0<\angle\mathrm{A}<90^\circ)$

$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}-\cos A=\dfrac{17}{13}$의 좌변을 정리하면

$\dfrac{b^2+c^2-bc\cos A}{bc}=\dfrac{17}{13}$이다.

한편,

$\dfrac{b^2+c^2-bc\cos A}{bc}$

$=\dfrac{b^2+c^2-2bc\cos A+bc\cos A}{bc}$

$=\dfrac{a^2+bc\cos A}{bc}$

$=\dfrac{a^2}{bc}+\cos A$

$=\dfrac{a}{13}+\dfrac{\sqrt{169-a^2}}{13}=\dfrac{17}{13}$

$\sqrt{169-a^2}=17-a$에서 양변 제곱하면

$169-a^2=289-34a+a^2$

$2a^2-34a+120$

$a^2-17a+60=0$

$(a-5)(a-12)=0$

$a=5$ 또는 $a=12$

따라서 a의 값으로 가능한 모든 값의 합은 17이다.

46) 정답 12

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{PQ}:\overline{BQ}=2:1$이므로

$\overline{AC}=a$라 하면 삼각형 QBC의 넓이는

$S=\frac{1}{2}\times\triangle PQC$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4\times a=a\cdots$㉠

직각삼각형 PAC에서

$\overline{PA}=2$, $\overline{AC}=a$이므로 $\overline{PC}=\sqrt{a^2+4}$

직각삼각형 QAC에서

$\overline{QA}=6$, $\overline{AC}=a$이므로 $\overline{QC}=\sqrt{a^2+36}$

따라서 $\sin(\angle AQC)=\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}$

삼각형 PQC의 외접원의 넓이가 16π이므로

외접원의 반지름의 길이는 4이다.

사인법칙에서

$\frac{\overline{PC}}{\sin(\angle PQC)}=2R\rightarrow\frac{\sqrt{a^2+4}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}}=8$

$\frac{\sqrt{a^4+40a^2+144}}{a}=8$

$\sqrt{a^4+40a^2+144}=8a$

$a^4-24a^2+144=0$

$(a^2-12)^2=0$

$a=2\sqrt{3}$

㉠에서 $S=2\sqrt{3}$이다.

따라서 $S^2=12$

47) 정답 675

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{AC}=k$라 하면

삼각형 ABC에서

$k^2=9+16-2\times3\times4\times\cos B$

$k^2=25-24\cos B\cdots$㉠

삼각형 ADC에서

$k^2=9+1-2\times3\times1\times\cos D$

$k^2=10-6\cos D\cdots$㉡

한편, $\angle B+\angle D=\pi$이므로

$\cos B=\cos(\pi-D)=-\cos D$이다.

㉠, ㉡에 대입하면

$25-24\cos B=10+6\cos B$

$30\cos B=15$

$\cos B=\frac{1}{2}$

따라서 $\angle B=\frac{\pi}{3}$이고 $\angle D=\frac{2}{3}\pi$

사각형 ABCD의 넓이 S

S=(△ABC의 넓이)+(△ADC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times3\times1\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=3\sqrt{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}=\frac{15}{4}\sqrt{3}$

따라서 $S=\frac{15}{4}\sqrt{3}$

$16S^2=225\times3=675$

[다른 풀이]

[랑데뷰세미나 (세미나 58) 헤론의 확장 참고]

브라마굽타 공식으로

$s=\frac{11}{2}$

$S=\sqrt{\left(\frac{11}{2}-4\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-1\right)}$

$=\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

48) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

$\angle BAD=\theta$라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

삼각형 ABD의 넓이가 $\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times1\times3\times\sin\theta$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{BD}^2 = 1+9-2\times1\times3\times\frac{1}{3}=8$

한편, 삼각형 BCD에서

$\angle BCD=\pi-\theta$이므로 $\cos(\pi-\theta)=-\frac{1}{3}$이다.

선분 CD의 길이를 x라 하면

$8=4+x^2-2\times2\times x\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$x^2+\frac{4}{3}x-4=0$

$3x^2+4x-12=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{3}$

$x=\frac{2\sqrt{10}-2}{3}=\frac{2}{3}(\sqrt{10}-1)$ $(\because x>0)$

49) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 이현일T]

$s=\frac{4+5+7}{2}=8$이므로 헤론의 공식에 의하여

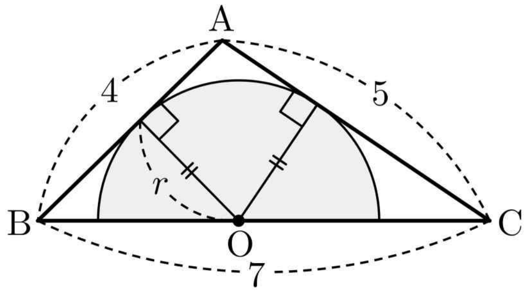
$\triangle ABC = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}=4\sqrt{6}$

이때, 반원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABO = 2r$, $\triangle ACO = \frac{5}{2}r$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ABO + \triangle ACO$

$= 2r+\frac{5}{2}r=\frac{9}{2}r$



따라서 $\frac{9}{2}r=4\sqrt{6}$이므로 $r=\frac{8\sqrt{6}}{9}$

그러므로 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{384}{81}=\frac{64}{27}\pi$

50) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

삼각형 OAD의 넓이가 1이므로

$1=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\angle AOD)$에서 $\angle AOD=\frac{\pi}{6}$

삼각형 OBC의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\angle BOC)$에서 $\angle BOC=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\angle AOD+\angle BOC=\frac{\pi}{2}$

그러므로 $\angle AOB+\angle COD=\frac{3}{2}\pi$

$\angle COD=\theta$라 하면 $\angle AOB=\frac{3}{2}\pi-\theta$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-2\cos\theta$

$S_2=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\theta=2\sin\theta$

$5S_1=12S_2$에서 $-10\cos\theta=24\sin\theta$이 성립한다.

θ는 둔각이고 $\tan\theta=-\frac{5}{12}$이므로 $\cos\theta=-\frac{12}{13}$이다.

따라서
삼각형 OCD에서

$\overline{CD}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\left(-\frac{12}{13}\right)=8+\frac{96}{13}=\frac{200}{13}$

따라서 $\overline{CD}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{26}}{13}$

51) 정답 4
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\angle BCD:\angle BOD=3:2$에서

$\angle BCD=3\theta$, $\angle BOD=2\theta$라 하면 중심각과 원주각의 관계에서 $\angle BAC=\theta$이다.

원에 내접하는 사각형의 두 마주보는 두 각의 합은 π이므로

$3\theta+\theta=\pi$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

따라서

$\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{4}$이고 $\angle\mathrm{BOD}=\frac{\pi}{2}$이다.

$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{AOD}=\beta$라 하면 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2는

$S_1=\frac{1}{2}\sin\alpha$, $S_2=\frac{1}{2}\sin\beta$

주어진 조건이 $3S_1=4S_2$이므로 $3\sin\alpha=4\sin\beta$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\sin\beta=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$3\sin\alpha=-4\cos\alpha$

$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$이고 $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$이므로 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{OA}})^2+(\overline{\mathrm{OB}})^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{5+5-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)}=4$$

52) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

(가)에서 OA와 OP가 이루는 각의 크기중 작은 것을 α라 하면 원의 반지름의 길이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times4\times\alpha=\frac{5}{3}\pi$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}$(x축)와 $\overline{\mathrm{OP}}$가 이루는 각의 크기는 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$이다.

그럼 동경 OP는 제1사분면 또는 제4사분면에 위치하게 된다.

(i) 동경의 위치가 제1사분면일 때

$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)이므로

$\sin\theta=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 (나)조건에 모순이다.

(ii) 동경의 위치가 제4사분면일 때

$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{6}$(단, n은 정수) 이므로

$\sin\theta=\sin\left(2n\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\left(2n\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{1}{2}>-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 (나)조건을 만족한다.

(i), (ii)에서 $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{6}$

그러므로 $\cos\theta+\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

53) 정답 14

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$라 두면 접선의 방정식은 $\cos\theta x+\sin\theta y-1=0$

$\mathrm{A}(-2,0)$에서 접선까지 거리는

$\frac{|-2\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=|2\cos\theta+1|$이다.

따라서 $1<|2\cos\theta+1|<1+\sqrt{3}$

(i) $|2\cos\theta+1|>1$일 때,

$2\cos\theta+1<-1$ 또는 $2\cos\theta+1>1$

$\cos\theta<-1$ (모순) 또는 $\cos\theta>0$이다.

따라서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\cdots$㉠

(ii) $|2\cos\theta+1|<1+\sqrt{3}$일 때,

$-1-\sqrt{3}<2\cos\theta+1<1+\sqrt{3}$

$-2-\sqrt{3}<2\cos\theta<\sqrt{3}$

$-\frac{2+\sqrt{3}}{2}<\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{11}{6}\pi\cdots$㉡

따라서

㉠, ㉡에서

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$이다.

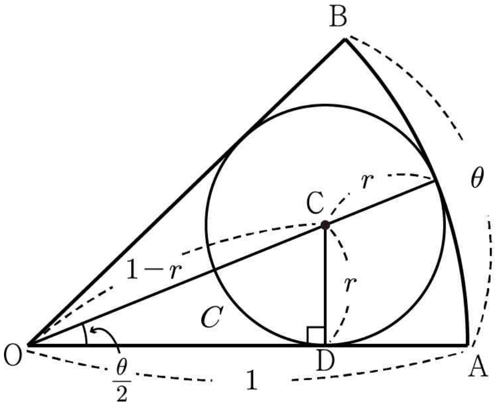
$a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $c=\frac{3}{2}\pi$, $d=\frac{11}{6}\pi$

$\frac{d}{a}=11$, $\frac{c}{b}=3$

$\frac{d}{a}+\frac{c}{b}=14$이다.

54) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]

그림과 같이 원 C의 중심을 C라 하고 원 C와 부채꼴 OAB의 선분 OA와의 교점을 D, 호 AB와의 교점을 E라 하자.



세 점 O, C, E는 한직선 위에 있다.

$\angle\mathrm{BOA}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{CD}}=r$이라 하면 $\overline{\mathrm{OC}}=1-r$이다.

$\angle\mathrm{COD}=\frac{\theta}{2}$이고 $\angle\mathrm{CDO}=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 COD에서

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r}{1-r}$$

$$\frac{1-r}{r}=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{1}{r}-1=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

따라서 $r=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

그러므로 원 C의 넓이는 $\pi\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$이다.

55) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]

함수 $f(x)$의 최댓값이 3이고 최솟값이 -1이므로 $a=2$, $d=1$이다.

따라서 $f(x)=2\sin(bx+c)+1$

$2\sin(bx+c)+1=0 \Rightarrow \sin(bx+c)=-\frac{1}{2}\cdots$㉠

한편, $f(x)=a\sin(bx+c)+d$는 $y=a\sin bx+d$를 x축으로 $-\frac{c}{b}<0$만큼 평행 이동한 그래프이다.

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$인 θ는 $\cdots, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \cdots$

따라서 문제 그림에서

(i) 원점 오른쪽 첫 번째가 $\frac{7}{6}\pi$, 두 번째가 $\frac{11}{6}\pi$일 때,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{11}{12}\pi\right)=0$에서

㉠에서 $\frac{1}{4}\pi b+c=\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{12}\pi b+c=\frac{11}{6}\pi$이다.

연립방정식을 풀면

$\frac{3}{4}\pi b=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $b=\frac{8}{9}$이다.

$1<b<3$이므로 모순이다.

(ii) $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 원점 바로 왼쪽의 교점이 $\frac{7}{6}\pi$에 대응하는 점이고 오른쪽 첫 번째가 $\frac{11}{6}\pi$, 두 번째가 $\frac{19}{6}\pi$일 때,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{11}{12}\pi\right)=0$이므로

㉠에서 $\frac{1}{4}\pi b+c=\frac{11}{6}\pi$, $\frac{11}{12}\pi b+c=\frac{19}{6}\pi$이다.

연립방정식을 풀면

$\frac{2}{3}\pi b=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $b=2$이다. $1<b<3$을 만족한다.

$\frac{\pi}{2}+c=\frac{11}{6}\pi$에서 $c=\frac{4}{3}\pi$

$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{4}{3}\pi\right)+1$

따라서 $a=2,\ b=2,\ c=\frac{4}{3}\pi,\ d=1$이다.

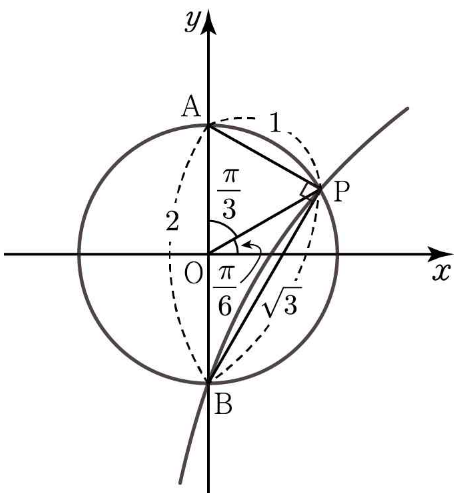
$a\times b\times c\times d=\frac{16}{3}\pi$

56) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

주어진 부등식의 양변에 16×2^p을 곱하면
$(2^x-16)(2^x-2^p)\le 0$
$(2^x-2^4)(2^x-2^p)\le 0$
p가 음의 정수이므로 $2^p\le 2^x\le 2^4$
$\therefore\ p\le x\le 4$
만족시키는 정수 x의 개수가 10이므로
$4-p+1=10$에서 $p=-5$이다.

57) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 이정배T]

$y=\log_a(\sqrt{3}x+1)-1$의 그래는 a의 값에 관계없이 $\mathrm{B}(0,\ -1)$을 지난다.
삼각형 APB는 빗변의 길이가 2인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{3}$ 이므로 $\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{6}$ 이다.



원점을 O라 하면 $\angle\mathrm{AOP}=\frac{\pi}{3}$ 이고, 점 P의 좌표는 $\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 이다.

점 P는 함수 $y=\log_a(\sqrt{3}x+1)-1$의 그래프 위의 점이므로 $\log_a\left(\frac{5}{2}\right)-1=\frac{1}{2}$이다.

$\log_a\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$에서 $a^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}$

따라서 양변 제곱하면 $a^3=\frac{25}{4}$이다.

58) 정답 ⑤
$(\sin x+\cos x)^2=\sqrt{3}\sin x+1$에서
$1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin x+1$
$\sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$
$0\le x\le\pi$이므로
$\sin x=0$일 때 $x=0,\ x=\pi$
$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $0+\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\pi=2\pi$

59) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

$|\cos x|=t$라 두면 $0\le t\le 1$이고

$\cos(|\cos x|)=\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

만족하는 $t=\frac{\pi}{4}$

따라서 $|\cos x|=\frac{\pi}{4}$

그러므로 $\cos x=\pm\frac{\pi}{4}$

$\cos x=\frac{\pi}{4}$의 두 근을 α,β라 두면 두 근은 $x=\pi$에 대칭이므로 $\alpha+\beta=2\pi$

$\cos x=-\frac{\pi}{4}$의 두 근을 γ,δ라 두면 두 근은 $x=\pi$에 대칭이므로 $\gamma+\delta=2\pi$
따라서 모든 근의 합은 4π이다.

60) 정답 7
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

원 C의 넓이가 최대일 때는 그림과 같이 점 Q가 $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점일 때이다. 그 때 원 C와 호 AP의 접점을 점 R이라 하자.

$\overline{\mathrm{OQ}} = \sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{QR}} = 1 - \sin\theta$

따라서 작은 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{1-\sin\theta}{2}$이다.

원의 넓이가 $\dfrac{1}{9}\pi$이므로 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 $\dfrac{1-\sin\theta}{2} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{1}{3}$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{OA}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

삼각형 AQB에서 코사인 법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BQ}}^2 &= \overline{\mathrm{AQ}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta \\ &= \frac{8}{9} + 4 - 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{8+36-32}{9} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$p=3,\ q=4$이므로

$p+q=7$이다.

61) 정답 39
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$y = 2\cos 36x$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{36} = \dfrac{\pi}{18}$이므로 정수 p에 대하여 최대는 $x = \dfrac{2p}{36}\pi$에서, 최소는 $x = \dfrac{2p+1}{36}\pi$에서 나타난다.

따라서 $x = \dfrac{m\pi}{36}$ (m은 정수)에 대칭인 그래프이다.

$y = \sin ax + 1$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{a}$이고 $x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2a}$ (n은 정수)에 대칭인 그래프이다.

조건을 만족하기 위해서는 함수 $f(x)$의 주기가 $g(x)$보다 작지 않고 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 대칭축이 같으면 된다.

$\dfrac{2\pi}{a} \geq \dfrac{\pi}{18}$에서 $a \leq 36$이고 함수 $f(x)$의 대칭축 $x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2a}$와 함수 $g(x)$의 대칭축 $x = \dfrac{m}{36}\pi$ 관계에서 $2a$는 36의 약수이면 된다. 즉, $2k = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$이다.

따라서 k가 자연수이므로 $k = 1, 2, 3, 6, 9, 18$

그러므로 k의 합은 $1+2+3+6+9+18 = 39$이다.

62) 정답 121
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

단위원 위의 한 점에서 cos값은 x값이므로 $\cos\theta$의 θ가 일정하게 커질 때 마다 단위원의 x축 위의 1에서 시작하여 제1사분면과, 제2사분면에 연속적으로 나타난다.

$\cos\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$에서 $n(A_k) = 31$가 되기 위해서는 m에 1부터 31까지 $\cos\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$에 대입할 때 모두 다른 값 31개가 나오고 $m=32$을 대입하면서 같은 값이 나와야 한다.

$m=31$일 때, $\cos\dfrac{60}{k}\pi$이다.

(i) k가 짝수일 때

$k=60$이면 31개의 cos값을 갖는다.

$\cos\dfrac{60}{60}\pi = -1$,

$\cos\dfrac{62}{60}\pi = \cos\dfrac{58}{60}\pi,\ \cos\dfrac{64}{60}\pi = \cos\dfrac{56}{60}\pi,\ \cdots$

(ii) k가 홀수일 때

$k=61$이면 31개의 cos값을 갖는다.

$\cos\dfrac{60}{61}\pi$,

$\cos\dfrac{62}{61}\pi = \cos\dfrac{60}{61}\pi,\ \cos\dfrac{64}{61}\pi = \cos\dfrac{58}{61}\pi,\ \cdots$

(i), (ii)에서 $k=60,\ k=61$이다.

따라서 모든 k의 값의 합은 121이다.

63) 정답 399
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

단위원 위의 한 점에서 cos값은 x값이므로 $\cos\theta$의 θ가 일정하게 커질 때 마다 단위원의 x축 위의 1에서 시작하여 제1사분면과, 제2사분면에 연속적으로 나타난다.

$\cos\frac{2m-1}{k}\pi$에서

$k=1$일 때, $\cos(2m-1)\pi$의 값은 m에 값에 관계없이 항상 -1이므로 $n(A_1)=1$

$k=2$일 때, $\cos\frac{2m-1}{2}\pi$의 값은 m에 값에 관계없이 항상 0이므로 $n(A_2)=1$

$k=3$일 때, $\cos\frac{2m-1}{3}\pi$의 값은 $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\pi$, $\cos\frac{5}{3}\pi$의 값이 반복적으로 나타나는데 $\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5}{3}\pi$이므로 $n(A_3)=2$

$k=4$일 때, $\cos\frac{2m-1}{4}\pi$의 값은 $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{3}{4}\pi$, $\cos\frac{5}{4}\pi$, $\cos\frac{7}{4}\pi$의 값이 반복적으로 나타나는데 $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{7}{4}\pi$, $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\frac{5}{4}\pi$이므로 $n(A_4)=2$

$k=5$일 때, $\cos\frac{2m-1}{5}\pi$의 값은 $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3}{5}\pi$, $\cos\pi$, $\cos\frac{7}{5}\pi$, $\cos\frac{9}{5}\pi$의 값이 반복적으로 나타나는데 $\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{9}{5}\pi$, $\cos\frac{3}{5}\pi=\cos\frac{7}{5}\pi$이므로 $n(A_5)=3$

$k=6$일 때, $\cos\frac{2m-1}{6}\pi$의 값은 $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{5}{6}\pi$, $\cos\frac{7}{6}\pi$, $\cos\frac{3}{2}\pi$, $\cos\frac{11}{6}\pi$의 값이 반복적으로 나타나는데 $\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{11}{6}\pi$, $\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3}{2}\pi$, $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\frac{7}{6}\pi$이므로 $n(A_6)=3$

따라서 $n(A_k)=\left[\frac{k+1}{2}\right]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

$\left[\frac{199+1}{2}\right]=100$

$\left[\frac{200+1}{2}\right]=100$

이므로 $k=199$, $k=200$이다.
따라서 모든 k의 합은 399

64) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=5:3$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=5b$, $\overline{\mathrm{CD}}=3b$라 할 수 있다.
삼각형 ABD에서 사인법칙을 적용해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 표현하면

$\frac{5b}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin B}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{5b\times\sin B}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}$

삼각형 ACD에서 사인법칙을 적용해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 표현하면

$\frac{3b}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin C}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{3b\times\sin C}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}$

따라서

$\frac{5b\times\sin B}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}=\frac{3b\times\sin C}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}$에서

$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{3}{5}\times\frac{\sin(\angle\mathrm{BAD})}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=a$

따라서

$\frac{\sin(\angle\mathrm{BAD})}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=\frac{5}{3}a$

$\therefore\ k=\frac{5}{3}$

65) 정답 30
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

두 수 4와 67사이에 n개의 자연수를 넣어서 만든 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $a_1=4$, $a_{n+2}=67$이다.
따라서 $67=4+(n+1)d$에서 $d\times(n+1)=63$이다.

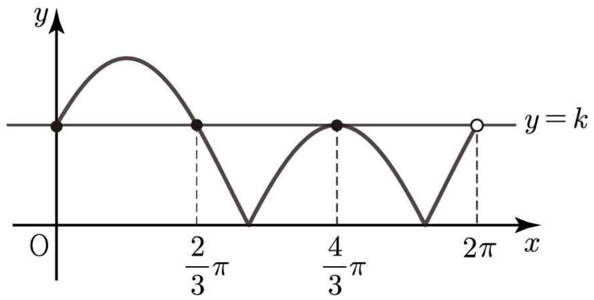
d	n	
3	20	$3n+1=25$
7	8	$7n-3=25$
9	6	$9n-5\neq25$

21	2	$21n-17=25$

$d=3$일 때, $n=20$로 만족한다.
$d=7$일 때, $n=8$로 만족한다.
$d=21$일 때, $n=2$로 만족한다.
따라서 가능한 n의 합은 $20+8+2=30$

66) 정답 2
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$y=a\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+b$의 그래프는 $y=a\cos x$의 그래프를 x축으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.
$y=a\cos x$의 그래프는 $x=\pi$에서 최솟값 $-a$를 가지므로 $y=a\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+b$의 그래프는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$에서 최솟값 $-a+b$을 갖는다.
따라서 $f(x)=\left|a\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+b\right|$가 $y=k$와 $0\le x<2\pi$에서 세 점에서 만나고 교점의 x좌표인 α가 최소일 때는 다음 그림과 같이 교점의 x좌표가 $\alpha=0$, $\gamma=\dfrac{4}{3}\pi$일 때다. 이때 $\beta=\dfrac{2}{3}\pi$이다.



따라서 $f(0)=f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$\dfrac{1}{2}a+b=|-a+b|$

$\dfrac{1}{2}a+b=a-b$ $(\because a\ge b)$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{4}a$, $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{2}{3}\pi$, $\gamma=\dfrac{4}{3}\pi$이다.

그러므로

$\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{\gamma}{\beta}\right)\times b$

$=\left(\dfrac{1}{2}a-2\right)\times\dfrac{1}{4}a$

$=\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{1}{2}a$

$=\dfrac{1}{8}\left(a^2-4a\right)$

$=\dfrac{1}{8}(a-2)^2-\dfrac{1}{2}$ $(1\le a\le 4)$

$a=2$일 때, $m=-\dfrac{1}{2}$

$a=4$일 때, $M=0$

따라서 $\dfrac{1}{M-m}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$이다.

67) 정답 4
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

두 항 a_{2k-1}와 a_{2k+7}의 항의 차이는 $(2k+7)-(2k-1)=8$이므로 두 항의 중항은 a_{2k+3}이다.
즉, a_{2k-1}, a_{2k+3}, a_{2k+7}은 등차수열을 이루므로
(가)에서 $a_{2k+3}=\dfrac{a_{2k-1}+a_{2k+7}}{2}=50$이다.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{2k+5}a_n$은 등차수열 a_n의 제1항부터 제$(2k+5)$항까지 합이다.
따라서

$$\sum_{n=1}^{2k+5}a_n=\frac{(2k+5)\left(a_1+a_{2k+5}\right)}{2}$$
$$=\frac{(2k+5)\left(a_3+a_{2k+3}\right)}{2}$$
$$=\frac{(2k+5)(2+50)}{2}$$
$$=26(2k+5)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2k+5}a_n=26\left(k^2-3\right)$에서

$2k+5=k^2-3$

$k^2-2k-8=0$

$(k+2)(k-4)=0$

$\therefore\ k=4$

[랑데뷰팁]

k는 상수이다. 다른 식을 대입할 수 없다.

[랑데뷰팁]2

$k=4$일 때, $a_3=2$, $a_{11}=50$에서 $a_1=-10$, $d=6$임을 알 수 있다.

$S_{13}=\dfrac{13\times(-20+12\times6)}{2}=13\times26=26\left(4^2-3\right)$으 로 일치한다.

68) 정답 2

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\dfrac{(S_8)^3}{(S_4)^2\times S_{12}}=3$을 정리하면

$(S_4)^2\times S_{12}=\dfrac{1}{3}(S_8)^3$

$\left\{\dfrac{a\left(1-r^4\right)}{1-r}\right\}^2\times\dfrac{a\left(1-r^{12}\right)}{1-r}=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{a\left(1-r^8\right)}{1-r}\right\}^3$

$\left(1-r^4\right)^2\times\left(1-r^{12}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-r^8\right)^3$

에서 $r^4=k$라 하면

$(1-k)^2\left(1-k^3\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-k^2\right)^3$

$(1-k)^3\left(1+k+k^2\right)=\dfrac{1}{3}(1-k)^3(1+k)^3$

$1+k+k^2=\dfrac{1}{3}\left(1+3k+3k^2+k^3\right)$

$3+3k+3k^2=1+3k+3k^2+k^3$

$k^3=2$

$k=\sqrt[3]{2}$

따라서 $r^4=\sqrt[3]{2}$

$\therefore\ r^{12}=2$

69) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$x^2-kx=2x^2-9x+12$에서

$x^2-(9-k)x+12=0$의 두 근이 a, b이고

k, a, b가 등차수열을 이루므로

$a=\dfrac{k+b}{2}$이다.

따라서 $b=2a-k$이다.

$x^2-(9-k)x+12=0$의 두 근 a, $2a-k$에서

$a+2a-k=9-k$

$\therefore\ a=3$

$a(2a-k)=12$에서 $k=2$이다.

따라서 $b=4$

$a+b=7$이다.

70) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

점 C의 x좌표를 β, 점 B의 x좌표를 α라 하면 점 A는 점 B의 원점 대칭인 점이므로 x좌표가 $-\alpha$이다.

그러므로 $-\alpha$, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서 $\dfrac{-\alpha+\beta}{2}=\alpha$가 성립한다.

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\beta}{3}$

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\beta}{3},\ -\dfrac{3k}{\beta}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\beta}{3},\ \dfrac{3k}{\beta}\right)$, $\mathrm{C}\left(\beta,\ \dfrac{k}{\beta}\right)$이다.

따라서 삼각형 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-\dfrac{\beta}{3} & \dfrac{\beta}{3} & \beta & -\dfrac{\beta}{3}\\ -\dfrac{3k}{\beta} & \dfrac{3k}{\beta} & \dfrac{k}{\beta} & -\dfrac{3k}{\beta}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(-k+\frac{k}{3}-3k\right)-\left(-k+3k-\frac{k}{3}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{11}{3}k-\left(\frac{5}{3}k\right)\right|=\frac{8}{3}k=16$$

따라서 $k=6$이다.

71) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{\mathrm{AB}}=a$이라 하고 평행사변형의 높이를 h라 하면

평행사변형 ABCD의 넓이는 ah

삼각형 $\mathrm{EDA'}$와 삼각형 EBC는 합동이므로 삼각형

EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{15}$이다.

삼각형 EBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times h$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times h=ah\times\frac{1}{15}$

따라서 $\overline{\mathrm{CE}}=\frac{2}{15}a$, $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{13}{15}a$이고

삼각형 EDA′와 삼각형 EBC는 합동이므로

$\overline{\mathrm{A'E}}=\overline{\mathrm{CE}}=\frac{2}{15}a$, $\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{DE}}=\frac{13}{15}a$

$\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$가 이 순으로 등차수열을 이루므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{24}{15}a$이다.

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}$

72) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

반지름의 길이가 $\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+2}}$이고, 중심각의 크기가 $\frac{1}{2^n}+4$인 부채꼴의 넓이는 S_n이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+2}}\right)^2\times\left(\frac{1+2^{n+2}}{2^n}\right)$$
$$=\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+2}}$$

따라서 $\frac{1}{S_n}=\frac{1+2^{n+2}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}+2$

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{S_n}-2\right)=\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^8}$$
$$=\frac{128-1}{256}=\frac{127}{256}$$

73) 정답 18
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$m^{S_n}=n^2+5n+6$의 양변에 밑이 m인 로그를 취하면

$S_n=\log_m(n+2)(n+3)$

$S_{n-1}=\log_m\{(n+1)(n+2)\}$

$S_n-S_{n-1}=\log_m\frac{n+3}{n+1}$

$\therefore\ a_n=\log_m\frac{n+3}{n+1}\ (n\geq 2)$, $a_1=\log_m 12$

$a_1+a_6+a_{11}$

$=\log_m 12+\log_m\frac{9}{7}+\log_m\frac{14}{12}=\log_m 18=1$에서

$m=18$

74) 정답 2
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$S_{2k}=-25$에서

S_{2k}에서 자연수 k와 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1을 구하자.

$S_{2k}=\frac{2k\{2a_1+(2k-1)(-3)\}}{2}=-25$

$k(2a_1-6k+3)=-25$

$k(6k-3-2a_1)=25$

을 만족하는 자연수 k를 구해보자.

(i) $k=1$일 때, $a_1=-11$ ⇒ a_1은 자연수이므로 모순

(ii) $k=5$일 때, $5(27-2a_1)=25$에서 $a_1=11$

$a_1=11$, $d=-3$인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$S_5=\frac{5(22-12)}{2}=25$로 만족한다.

따라서 일반항 a_n은

$a_n=11+(n-1)\times(-3)=-3n+14$

따라서 $a_4=2$

(iii) $k=25$일 때, $25(147-2a_1)=25$에서 $a_1=73$

$a_1=73$, $d=-3$인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$S_{25}=\frac{25(146-72)}{2}\neq 25$로 모순이다.

(i)~(iii)에서 a_4은 2이다.

75) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\sum_{k=1}^{12} a_k = 0$

$\sum_{k=1}^{12} a_k^2 = 6\times1+6\times4=30$

따라서

$\sum_{k=1}^{12}\left(a_k-\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(a_k+k)^2$

$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\left(a_k-\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{1}{2}(a_k+k)^2\right\}$

$=\sum_{k=1}^{12}\left(a_k^2-ka_k+\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{2}a_k^2+ka_k+\frac{1}{2}k^2\right)$

$=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{3}{2}a_k^2+\frac{3}{4}k^2\right)$

$=\frac{3}{2}\times30+\frac{3}{4}\times\frac{12\times13\times25}{6}$

$=45+\frac{975}{2}$

$=\frac{1065}{2}$

76) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=k}^{n} a_m\right)=T_n=-\frac{1}{n+2}$이라 하면

$k=1$	$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
$k=2$	$a_2+a_3+\cdots+a_n$
$k=3$	$a_3+\cdots+a_n$
	$\cdots$
$k=n$	a_n
합	$T_n=1\times a_1+2\times a_2+\cdots+n\times a_n$

$T_n=-\frac{1}{n+2}$에서

$T_1=a_1=-\frac{1}{3}$

$\therefore a_1=-\frac{1}{3}$

$n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여

$T_n-T_{n-1}=na_n=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$\therefore\ a_n=\begin{cases}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} & (n\ge2)\\ -\frac{1}{3} & (n=1)\end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{8} a_n$

$=-\frac{1}{3}+\sum_{n=2}^{8}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{8}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{90}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{14}{90}\right)$

$=\frac{-30+7}{90}=-\frac{23}{90}$

77) 정답 780
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

원의 중심 $(n,\ n)$에서 점 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$의 거리에서 원의 반지름의 길이인 n을 더한 값이 M_k이고 반지름의 길이 n을 뺀 값이 m_k이다.

즉, $M_k=\sqrt{(x_k-n)^2+(y_k-n)^2}+n$, $m_k=\sqrt{(x_k-n)^2+(y_k-n)^2}-n$에서

$M_k\times m_k=(x_k-n)^2+(y_k-n)^2-n^2$

$\quad=x_k^2+y_k^2-2n(x_k+y_k)+n^2$

(나)에서 $x_k+y_k=-n$이므로

$M_k\times m_k=x_k^2+y_k^2+3n^2$

따라서

$\sum_{k=1}^{n}(M_k\times m_k)=\sum_{k=1}^{n}\left\{x_k^2+y_k^2+3n^2\right\}$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2+y_k^2\right)+3\sum_{k=1}^{n}n^2$

$=3n^3+3n+3n^3$

$=6n^3+3n$

$\frac{a_n}{3n}=2n^2+1$이므로

$\sum_{n=1}^{10}\frac{a_n}{3n}=\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+1\right)$

$=2\times385+10=770+10=780$

78) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

조립제법으로 다항식 $x^3-\left(n^2+2\right)x+2n^2$를 일차식 $x-1$으로 나눌 때 몫과 나머지를 구해보면

$x^3-\left(n^2+2\right)x+2n^2$

$=(x-1)\left(x^2+x-n^2-1\right)+n^2-1$

이다.

$Q(x)=x^2+x-n^2-1$이고 $a_n=n^2-1$이다.

한편 $Q(x)$를 $x-1$으로 나눈 나머지를 b_n은

$b_n=Q(1)=1+1-n^2-1=-n^2+1$이다.

따라서 $a_n+b_n=0$이므로

$\sum_{n=2}^{11}a_n+\sum_{n=1}^{10}b_n$

$=\sum_{n=1}^{10}\left(a_n+b_n\right)-a_1+a_{11}$

$=0-a_1+a_{11}$

$=0-0+120$

$=120$

79) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}-\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}=\sum_{k=1}^{10}\left(a_{3k-1}-a_{3k-2}\right)=10d=20$

$\therefore\ d=2$

수열 $\{a_{3k-2}\}$은 첫째항이 a_1이고 공차가 6인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}=\frac{10\left(2a_1+9\times6\right)}{2}=5\left(2a_1+54\right)=40$

$2a_1+54=8$

$2a_1=-46$

$\therefore\ a=-23$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -23, 공차가 2인 등차수열이다.

$a_n=2n-25$

$a_{50}=75$

80) 정답 511

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

점 $(2n-1,\ -\log_2 2n)$과 점 $(3n,\ 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x축과 평행한 직사각형은 가로의 길이가 $n+1$이고 세로의 길이가 $\log_2 2n$이므로 넓이는 $(n+1)\log_2 2n$이다.

점 $(4n+1,\ -\log_2(4n+2))$와 점 $(3n,\ 0)$을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x축과 평행한 직사각형은 가로의 길이가 $n+1$이고 세로의 길이가 $\log_2(4n+2)$이므로 넓이는 $(n+1)\log_2(4n+2)$이다.

따라서 두 직사각형의 넓이의 차 a_n은

$a_n=(n+1)\left(\log_2(4n+2)-\log_2 2n\right)$

$=(n+1)\log_2\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{8}\frac{a_{2^n-1}}{2^n}$

$=\sum_{n=1}^{8}\frac{2^n\left(\log_2\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\right)}{2^n}$

$=\sum_{n=1}^{8}\log_2\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$

$=\log_2\left(\frac{3}{1}\times\frac{7}{3}\times\frac{15}{7}\times\cdots\times\frac{2^9-1}{2^8-1}\right)$

$=\log_2\left(2^9-1\right)$

$=\log_2 511=\alpha$

따라서

$2^{\alpha}=2^{\log_2 511}=511$

81) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원]

$A(n,\ n^2)$, $B\left(n,\ -\frac{1}{2}n^2\right)$, $C(n+1,\ 0)$로 이루어진 삼각형의 넓이는

$a_n=\left\{n^2-\left(-\frac{1}{2}n^2\right)\right\}\times 1\div 2=\frac{3}{4}n^2$

$a_{n+1}=\frac{3}{4}(n+1)^2$

$\therefore\ a_n a_{n+1}=\frac{9}{16}n^2(n+1)^2$

$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{16}{9}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$

$=\frac{16}{9}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{9(2n+1)}{16a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{11^2}$

$=\frac{120}{121}$

82) 정답 ①

$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\{x-3k(k+1)\}^2$에서

$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\{x^2-6k(k+1)x+9k^2(k+1)^2\}$

$=nx^2-6x\sum_{k=1}^{n}k(k+1)+\sum_{k=1}^{n}9k^2(k+1)^2$

이때, 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수 n이 자연수, 즉 양수이므로 $x=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$일 때 $f(x)$는 최솟값을 가지므로 $g(n)=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이다.

$\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{3}{n}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=(n+1)(n+2)$

이므로

$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{g(n)}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{102}=\frac{50}{102}=\frac{25}{51}$

83) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$A_n(n,\ n(n+1))$, $B_n(n+2,\ 0)$이므로,

$\triangle OA_nB_n$의 넓이는

$S_n=\frac{1}{2}\times(n+2)\times n(n+1)$

$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$이다.

[랑데뷰팁]을 이용하여,

$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$이다.

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}$

$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$=\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{11\times 12}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{132}$

$=\frac{66-1}{132}$

$=\frac{65}{132}$

[랑데뷰팁]-부분분수 변형

$\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}=\frac{C-A}{ABC}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$

84) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원]

$2a_n + a_{n+1} - a_{n+2} = 2n-1$

① $n=2$을 대입하면

$2a_2 + a_3 - a_4 = 2\times2-1$

$2a_2 + 3 - 4 = 3$

$\therefore\ a_2 = 2$

② $n=1$을 대입하면

$2a_1 + a_2 - a_3 = 2\times1-1$

$2a_1 + 2 - 3 = 1$

$\therefore\ a_1 = 1$

③ $n=3$을 대입하면

$2a_3 + a_4 - a_5 = 2\times3-1$

$6+4-a_5 = 5$

$\therefore\ a_5 = 5$ …㉠

④ $n=4$을 대입하면

$2a_4 + a_5 - a_6 = 2\times4-1$

$8+5-a_6 = 7$

$\therefore\ a_6 = 6$

⑤ $n=5$을 대입하면

$2a_5 + a_6 - a_7 = 2\times5-1$

$10+6-a_7 = 9$

$\therefore\ a_7 = 7$

따라서 $a_1 = 1$, $a_7 = 7$

$a_1 + a_7 = 8$

85) 정답 1

(가) $a_{n+2} = 2a_n - 1$, $a_2 = x$ 라 하면

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$ … 은 차례로

$3, x, 2, x-1, 1, x-2$

의 값을 가지는 주기가 6인 주기 함수가 된다.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3x+3$

$$\sum_{k=1}^{40} a_k = 6\times(3x+3)+3+x+2+(x-1)$$
$$= 18x+18+2x+4$$
$$= 20x+22 = 42$$

$\therefore\ x = 1$

86) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원]

$a_1 = -16$, $d=2$인 등차수열 a_n의 합 S_n은

$$S_n = \frac{n\{2\times(-16)+(n-1)\times2\}}{2}$$
$$= n^2 - 17n$$
$$= \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4}$$ 이고

S_n은 $n = \frac{17}{2}$일 때, 최솟값을 갖는다,

그런데 n은 자연수이므로 $n=8$ 또는 $n=9$일 때, S_n의 값은 최소이고 $S_8 = S_9$이다.

따라서 $S_m + S_{m+1} + \cdots + S_{m+7}$은 항의 개수가 8인 수열의 합이므로 $S_5 + S_6 + \cdots + S_{11} + S_{12}$의 값이 최소이다. 그러므로 $m=5$이다.

87) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원]

자연수 n에 대하여 2^n, 4^n, 3^n, 7^n의 일의 자리 수는 다음과 같다.

n	2^n	3^n	4^n	7^n
1	2	3	4	7
2	4	9	6	9
3	8	7	4	3
4	6	1	6	1
5	2	3	4	7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$2^n + 3^n$을 10으로 나눈 나머지를 a_n으로 하는 수열 $\{a_n\}$은

$a_n = (2^n + 3^n$의 일의 자리 수)

이므로 $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$이고

$a_{n+4} = a_n$을 만족한다.

$4^n + 7^n$을 10으로 나눈 나머지를 b_n으로 하는 수열 $\{b_n\}$은

$b_n=(4^n+7^n$의 일의 자리 수)

이므로 $b_1=1$, $b_2=5$, $b_3=7$, $b_4=7$이고

$b_{n+4}=b_n$을 만족한다.

따라서 $c_n=2a_n-b_n$은

$c_{n+4}=c_n$을 만족하고 $c_1=9$, $c_2=1$, $c_3=3$, $c_4=7$ 이다.

$c_1+c_2+c_3+c_4=20$

$\sum_{n=1}^{m} c_n>100$에서 $5(c_1+c_2+c_3+c_4)=100$이므로

$\sum_{n=1}^{20} c_n=100$

$\sum_{n=1}^{m} c_n>100$을 만족하는 m의 최솟값은 21이다.

88) 정답 17

[출제자 : 황보백 송원학원]

$n=9$일 때, $\begin{cases} a_{26}=a_9+3 \\ a_{27}=2a_9+1 \\ a_{28}=-a_9-1 \end{cases}$ 이다.

$a_{26}+a_{27}+a_{28}=2a_9+3$이다.

$a_9=2a_3+1$이고 $a_3=2a_1+1$이다.

$a_1=1$이므로 $a_3=3$, $a_9=7$이다.

$a_{26}+a_{27}+a_{28}=2\times7+3=17$

89) 정답 126

(가), (나), (다)에서 $a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_n$이다.

$$\sum_{n=1}^{364} a_n=a_1+\sum_{n=1}^{121}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})=a_1+\sum_{n=1}^{121}2a_n$$

$$=a_1+2\left\{a_1+\sum_{n=1}^{40}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})\right\}$$

$$=a_1+2\left\{a_1+\sum_{n=1}^{40}2a_n\right\}$$

$$=a_1+2\left\{a_1+2\left(a_1+\sum_{n=1}^{13}a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}\right)\right\}$$

$$=a_1+2\left\{a_1+2\left(a_1+\sum_{n=1}^{13}2a_n\right)\right\}$$

$$=a_1+2\left\{a_1+2\left(a_1+2\left(a_1+\sum_{n=1}^{4}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})\right)\right)\right\}$$

$$=a_1+2\left\{a_1+2\left(a_1+2\left(a_1+\sum_{n=1}^{4}2a_n\right)\right)\right\}$$

$$=a_1+2\left\{a_1+2\left(a_1+2\left(a_1+2\left(a_1+\sum_{n=1}^{1}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})\right)\right)\right)\right\}$$

$$=a_1+2\{a_1+2(a_1+2(a_1+2(a_1+2a_1)))\}$$

$$=63a_1$$

한편, $a_9=32$에서 $a_9=4a_3=32$이므로 $a_3=8$이다.

$a_3=4a_1=8$에서 $a_1=2$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{364} a_n=63a_1=63\times2=126$$

90) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원]

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td>94</td><td rowspan="2">46</td><td rowspan="3">22</td><td rowspan="4">10</td><td rowspan="10">4</td></tr>
<tr><td>22(X)</td></tr>
<tr><td></td><td>10(X)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4 (X)</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="6">1</td></tr>
<tr><td>4 (X)</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{2}$(X)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2">2 (X)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

따라서 a_1으로 가능한 모든 값의 합은 $4+22+94=120$이다.

91) 정답 88
[출제자 : 황보백 송원학원]

$a_1=1$, $a_3=8$이고 $a_2=p$라 하면

$a_{n+2}=\sum_{k=a_n}^{a_{n+1}}(2k+1)$의 $n=1$을 대입하면

$a_3=\sum_{k=a_1}^{a_2}(2k+1)=\sum_{k=1}^{p}(2k+1)=\frac{p(3+2p+1)}{2}$

$=p(p+2)=8$

$p^2+2p-8=0$

$(p+4)(p-2)=0$

$\therefore\ a_2=2$

$a_{n+2}=\sum_{k=a_n}^{a_{n+1}}(2k+1)$의 $n=2$을 대입하면

$a_4=\sum_{k=a_2}^{a_3}(2k+1)=\sum_{k=2}^{8}(2k+1)=\frac{7(5+17)}{2}=77$

따라서

$\sum_{n=1}^{4}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4$

$=1+2+8+77$

$=88$

[랑데뷰팁]
n에 관한 일차식은 등차수열을 나타내므로
등차수열의 합 공식
$\sum_{k=a}^{b}f(k)=\frac{(b-a+1)\{f(a)+f(b)\}}{2}$
을 이용할 수 있다.

92) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

$n=1$일 때, $\left|(a_1)^2-2\times1^2\right|=2$이므로 $a_2=\{\log_2 2$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_2=1$

$n=2$일 때, $\left|(a_2)^2-2\times2^2\right|=7$이므로 $a_3=\{\log_2 7$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_3=2$

$n=3$일 때, $\left|(a_3)^2-2\times3^2\right|=14$이므로 $a_4=\{\log_2 14$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_4=3$

$n=4$일 때, $\left|(a_4)^2-2\times4^2\right|=23$이므로 $a_5=\{\log_2 23$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_5=4$

$n=5$일 때, $\left|(a_5)^2-2\times5^2\right|=34$이므로 $a_6=\{\log_2 34$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_6=5$

$n=6$일 때, $\left|(a_6)^2-2\times6^2\right|=47$이므로 $a_7=\{\log_2 47$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_7=5$

$n=7$일 때, $\left|(a_7)^2-2\times7^2\right|=73$이므로 $a_8=\{\log_2 73$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_8=6$

$n=8$일 때, $\left|(a_8)^2-2\times8^2\right|=92$이므로 $a_9=\{\log_2 92$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_9=6$

$n=9$일 때, $\left|(a_9)^2-2\times9^2\right|=126$이므로 $a_{10}=\{\log_2 126$의 정수 부분$\}$

$\therefore\ a_{10}=6$

10이하의 자연수 중 $k=9$일 때 만, $a_k=k-3$을 만족한다. 따라서 개수는 1

93) 정답 987
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\{a_n\}: 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^{14},\ 2^{15},\ 2^{30},\ \cdots$

$\Rightarrow \{a_{2n}\} : 2,\ 2^3,\ 2^7,\ 2^{15},\ 2^{31},\ \cdots$

$\Rightarrow \{a_{2n}\}=\{2^{b_{2n}}\}$이라 할 때,

$\{b_{2n}\}$: $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$

$\Rightarrow b_{2n}=2^n-1$

$$\Rightarrow a_{10}\times a_{12}\times\cdots\times a_{18}=2^{b_{10}}\times 2^{b_{12}}\times\cdots\times 2^{b_{18}} =2^{b_{10}+b_{12}+b_{14}+\cdots+b_{18}}$$

$$\Rightarrow b_{10}+b_{12}+\cdots+b_{18}$$
$$=(2^5-1)+(2^6-1)+\cdots+(2^9-1)$$
$$=2^5(1+2+2^2+\cdots+2^4)-5$$
$$=2^5\left(\frac{2^5-1}{2-1}\right)-5=2^{10}-2^5-5=1024-32-5$$
$$=987$$

$\Rightarrow a_{10}\times a_{12}\times\cdots\times a_{18}=2^{987}=t$

$\Rightarrow \log_2 t=987 \quad \therefore\ 987$

94) 정답 ①

$a_{n+5}-a_n=k \Rightarrow a_{n+5}=a_n+k$에서

$a_6=a_1+k,\ a_{11}=a_6+k=a_1+2k$

$\cdots$

즉, $b_n=a_{5n-4}+a_{5n-3}+a_{5n-2}+a_{5n-1}+a_{5n}$라 두면

$b_1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$이고

$$b_2=a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$$
$$=(a_1+k)+(a_2+k)+(a_3+k)+(a_4+k)+(a_5+k)$$
$$=b_1+5k$$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $5k$인 등차수열이다.

즉, $\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{n=1}^{20}b_n$이므로 첫째항이

$b_1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \left(\because \sum_{k=1}^{5}a_k=1\right)$이고 공차가 $5k$인 등차수열의 제20항까지의 합이다.

$$970=\frac{20\times(2\times1+19\times5k)}{2}$$

$97=2+95k$

따라서 $k=1$

95) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원]

$n=1$을 (가)에 대입하면 $a_2-a_1+a_1=2$

그러므로 $a_2=2$

$n=1$을 (나)에 대입하면 $a_3-a_2=2$

그러므로 $a_3=4$

$n=2$을 (가)에 대입하면 $a_4-a_3+a_2=6$

그러므로 $a_4=8$

$n=2$을 (나)에 대입하면 $a_5-a_4=3$

그러므로 $a_5=11$

$n=3$을 (가)에 대입하면 $a_6-a_5+a_3=12$

그러므로 $a_6=19$

$n=3$을 (나)에 대입하면 $a_7-a_6=4$

그러므로 $a_7=23$

$n=4$을 (가)에 대입하면 $a_8-a_7+a_4=20$

그러므로 $a_8=35$

96) 정답 ③

$a_1=6$

$a_2=3-1=2$

$a_3=3-3=0$

$a_4=3$

$a_5=3-2=1$

$a_6=3-6=-3$

$a_7=3+2=5$

$a_8=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$

$a_9=3$

이므로

$n\geq4$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+5}$이 성립한다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{55}a_n$$
$$=a_1+a_2+a_3+10(a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)+a_{54}+a_{55}$$
$$=6+2+0+10\left\{3+1+(-3)+5+\frac{9}{5}\right\}+3+1$$
$$=8+10\times\frac{39}{5}+4$$
$$=8+78+4=90$$