지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00037927032

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/8588

입니다. 감사합니다!

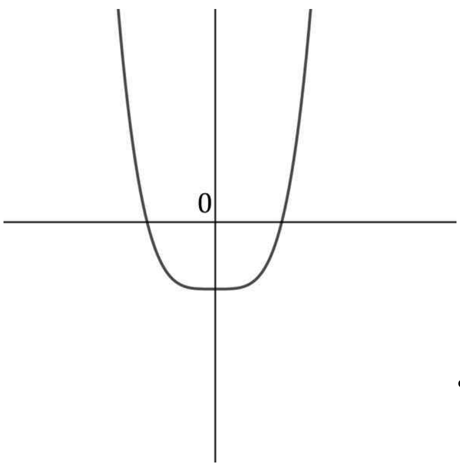
도파민 해설

1. 정답 ⑤

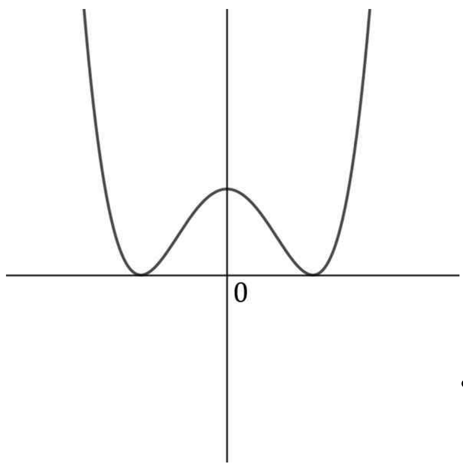
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 조건해석

$f(x)= ax^4+bx^2+c$가 있는데 최고차항의 계수가 양수라고 합니다. 일단 $a>0$이구요. 그리고 함수를 잘 관찰해보면 지금 짝수차항만 있네요? 우함수입니다. y축 대칭이에요. 대칭 팍 떠오르죠?

(가)조건에서 $f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3개라고 합니다. 그 x좌표가 α, β, γ라고 하네요.
어? $f(x)$의 개형을 생각해보세요.

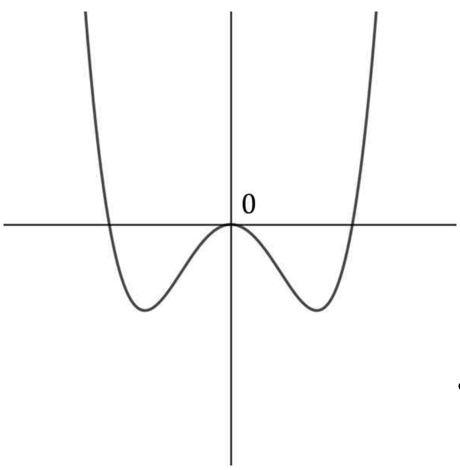


아니면



이래야 하잖아요.

그런데 왼쪽의 개형은 애초에 3개의 점에서 x축과 만날 수가 없는 개형이에요. 최대가 2개인데요.
오른쪽의 개형은 3개의 점에서 만나는 것이 가능하죠!



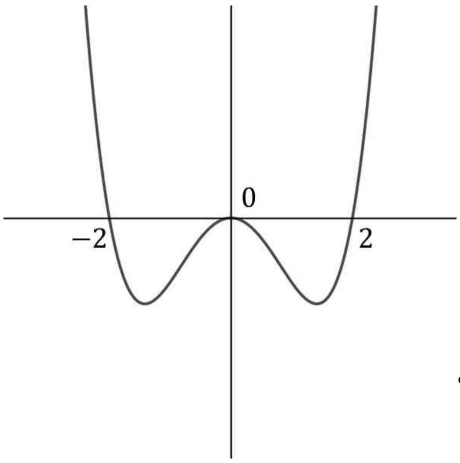
이렇게 x축과 $x=0$에서 접하면 되잖아요. 따라서 $f(0)=0$이고

$c=0$입니다. $f(x)=ax^4+bx^2$이네요.

(나)조건에서 $f(1)=-\frac{3}{4}$, $f'(-1)=1$이라고 합니다. 이건 그냥 계산하면 될 것 같은데요?

$f(1)=a+b=-\dfrac{3}{4}$이구요, $f'(x)=4ax^3+2bx$이니까 $f'(-1)=-4a-2b=1$입니다. 연립하면

$a=\dfrac{1}{4}$, $b=-1$이고 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2=\dfrac{1}{4}x^2(x^2-4)=\dfrac{1}{4}x^2(x-2)(x+2)$이네요. x축과 $x=2$, -2에서 그냥 만나고 $x=0$에서 접하는 그래프입니다.



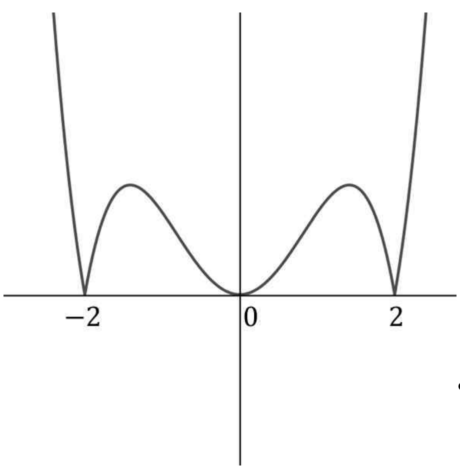
이렇게 되는 거죠.

아까 $f(x)$와 x축이 만나는 x좌표를 작은 순서대로 α, β, γ라고 했잖아요? 따라서
$\alpha=-2$, $\beta=0$, $\gamma=2$입니다.
ㄱ에서 $f(0)=0$이냐고 묻네요. 맞죠? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $f'(\alpha)=-4$냐고 묻습니다. 아까 $\alpha=-2$라고 했었죠? 이건 미분하고 넣어봐야 알 것 같아요.
$f'(x)=x^3-2x$입니다. 따라서 $f'(\alpha)=f'(-2)=-4$이네요. 맞죠? ㄴ도 맞습니다.

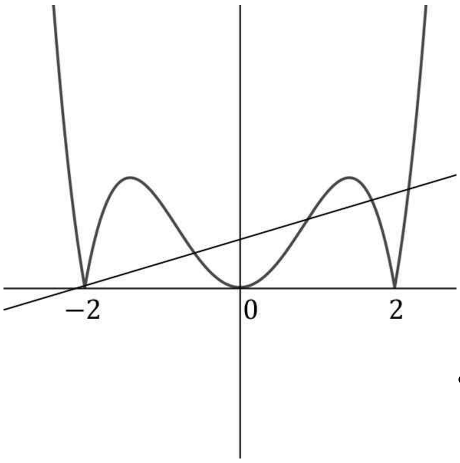
2) 절댓값 함수, ㄱㄴㄷ 유기성

ㄷ에서 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위를 구하랍니다. 다시 해석하면 $y=|f(x)|$와 $y=k(x-\alpha)$가 만나는 점이 3개가 되도록 k를 움직여봐라 이런 거죠? 그리고 아까 $\alpha=-2$라고 했었으니까 $y=|f(x)|$와 $y=k(x+2)$가 만나는 점이 3개가 되도록 해야 합니다.
가볼게요. 일단 그래프부터 그려봅시다. 아까 그려놓은 그래프에 절댓값을 씌워서 접어 올리면

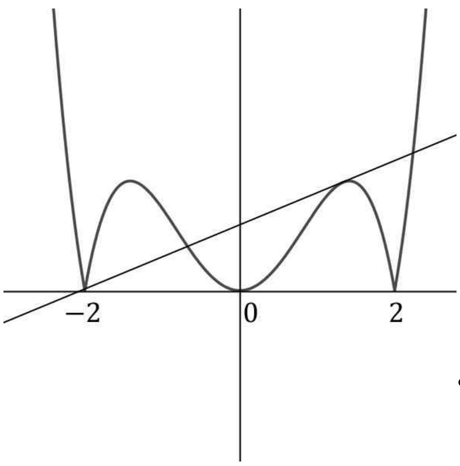


이렇게 됩니다. 여기서 기울기가 양수이고, $(-2,\ 0)$을 지나는 직선

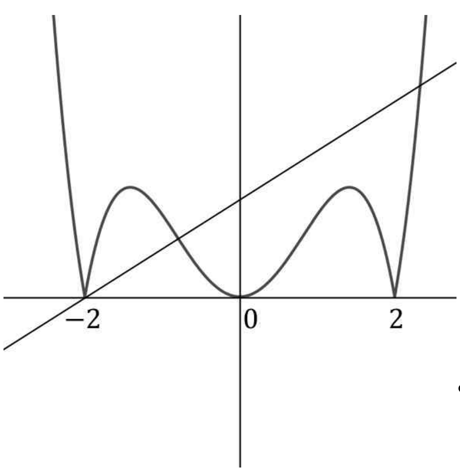
$y = k(x+2)$을 그려야 하잖아요? 그리고 만나는 점의 개수가 3이 되는 k의 범위를 찾아내야 해요. 일단 x축을 시작으로



이렇게 되면 5개의 점에서 만나죠. k를 더 움직여야겠어요.



이렇게 한 점에서 접하게 그리면 4개의 점에서 만납니다. 그리고 조금만 더 움직이면..!



이렇게 3개의 점에서 만납니다. 오! 범위 안으로 들어왔어요! 그러면 일단 접할 때의 기울기를 m이라 하면 $m < k$에서 3개의 점에서 만나는 거죠?

m을 구해봅시다. 일단 $-2 < x < 2$에서 $|f(x)|$는 $f(x)$를 접어 올린 거니까 $-f(x)$에요. x축 아래에 있던 걸 $(-)$곱해서 위로 올린 거잖아요?

그러면 $(t,\ -f(t))$에서 접선을 그어서 $(-2,\ 0)$을 지나게 하고 그 기울기를 구하면 되겠네요.

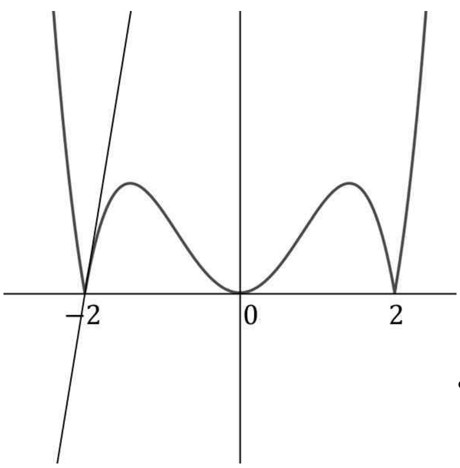
$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2$이고 $f'(x)=x^3-2x$이니까 $-2<x<2$에서 $|f(x)|=-f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2$입니다.

$(t,\ -f(t))$에서의 접선은 $(-t^3+2t)(x-t)-\dfrac{1}{4}t^4+t^2$이고 정리하면 $(-t^3+2t)x+\dfrac{3}{4}t^4-t^2$입니다. 이 직선이 $(-2,\ 0)$을 지나야 하니까 $\dfrac{3}{4}t^4+2t^3-t^2-4t=0$이고 정리하면 $3t^4+8t^3-4t^2-16t=0$입니다.

이거 인수분해하면 $t(t+2)^2(3t-4)=0$이 나오죠? 그런데 지금 접하는 점은 $x>0$에 있으니까 $t=\dfrac{4}{3}$입니다.

이제 기울기를 구해봅시다. $|f(x)|=-f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2$이니까 미분하고 $x=\dfrac{4}{3}$을 집어 넣으면 $\dfrac{8}{27}$이 나오네요. $m=\dfrac{8}{27}$이고 $\dfrac{8}{27}<k$에서 3개의 점과 만납니다.

그리고 계속 기울기를 키워봐요. 계속 3개의 점과 만나다가



이렇게 $x=-2$에서 접할 때 2개의 점에서 만나게 됩니다. 이 기울기를 n이라 하면 $\dfrac{8}{27}<k<n$에서 3개의 점에서 만나게 되는 거죠.

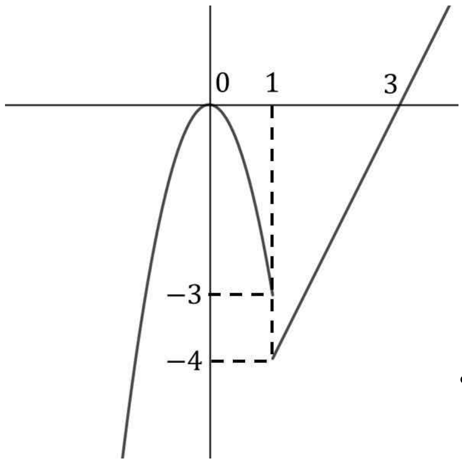
이젠 n을 구해봅시다. 어? 그런데 아까 ㄴ에서 $f'(-2)=-4$라고 하지 않았나요? 지금 $|f(x)|=f(x)$의 좌미분계수는 -4이지만 $-2<x<2$에서는 $f(x)<0$이어서 $(-)$를 곱하니까 $|f(x)|=-f(x)$가 되고 우미분계수는 4가 되는 거잖아요. 이미 ㄴ에서 힌트를 준 거네요! 따라서 $x=-2$에서 접할 때의 기울기는 4가 되고 $n=4$입니다. 범위는 $\dfrac{8}{27}<k<4$가 되네요. 맞죠! ㄷ도 맞습니다. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

2. 정답 80

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x\geq 1) \end{cases}$인데 $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$라고 하네요.

일단 $f(x)$의 그래프부터 그려볼까요? 일단 $x<1$에서 $f(x)$는 $x=0$에서 x축에 접하는 이차함수이구요, $x>1$에서 $f(x)$는 $x=3$에서 x축을 지나는 일차함수입니다.



이런 함수네요.

그때 $g(x)$는 위끝에 변수가 있네요. 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이 됩니다.
그리고 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x)$가 되네요. $x=1$을 넣으면 $g'(1)=0$입니다.

2) 함수끼리 사칙연산은 범위까지 그대로

$g'(x)=(x-1)f(x)$의 식을 구해봅시다. $g'(x)=\begin{cases} -3x^2(x-1) & (x<1) \\ 2(x-1)(x-3) & (x\geq 1) \end{cases}$이네요.

이때 $y=t$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 $h(t)$라고 하네요. 그리고
$\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 a에 대하여 $|a|$를 구하랍니다. 그럼 일단 그래프를 그려봐야겠는데요?

그럼 $g'(x)$를 적분해야겠어요. $g'(x)=\begin{cases} -3x^3+3x^2 & (x<1) \\ 2x^2-8x+6 & (x\geq 1) \end{cases}$이니까 적분하면

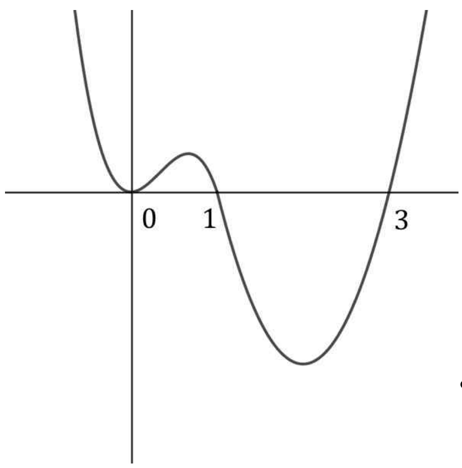
$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$입니다. 아직 적분상수는 몰라요.

그런데 아까 $g(0)=0$라고 했었죠? $C_1=0$이고 $g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 입니다.

그리고 방금 $g'(1)=0$라고 했었잖아요. $x=1$에서 미분계수가 존재한다는 건 $x=1$에서 미분가능하다는 거고 연속이기도 한다는 거죠. 따라서 $\lim\limits_{x \to 1-} g(x)=\dfrac{1}{4}=\lim\limits_{x \to 1+} g(x)=\dfrac{8}{3}+C_2$이고 $C_2=-\dfrac{29}{12}$입니다.

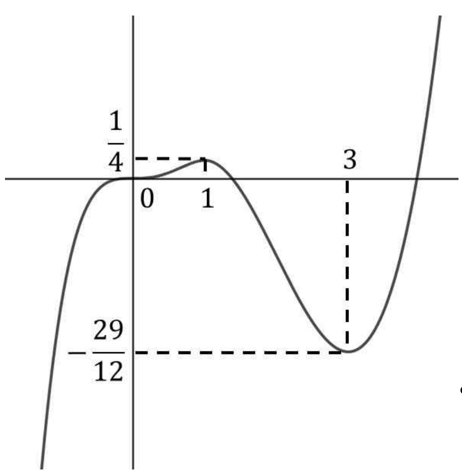
$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x \geq 1) \end{cases}$ 이네요.

이제 그래프 그려봅시다. 일단 $g'(x)=\begin{cases} -3x^2(x-1) & (x<1) \\ 2(x-1)(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$의 그래프를 그려보면 $x<1$에서는 $x=0$에서 접하고, $x=1$에서 x축과 만나구요, $x \geq 1$에서는 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 두 점을 지나는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수입니다.



이렇게 되네요.

위의 그림을 보면 $g(x)$는 $x=0$에서는 접하면서 방향 그대로 가구요, $x=1$에서는 극대가 되구요, $x=3$에서 극소가 됩니다. 극댓값은 $\dfrac{1}{4}$이고 극솟값은 $-\dfrac{29}{12}$인 함수입니다.

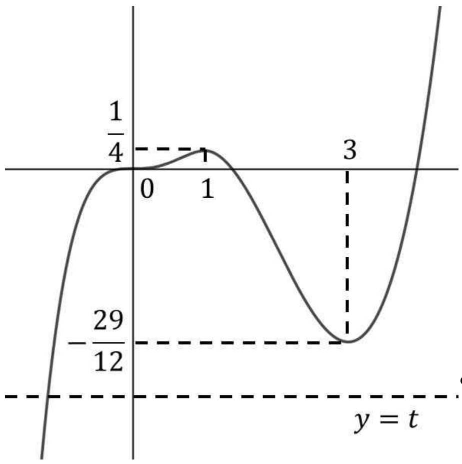


이런 함수이죠. 여기에 $y=t$와 이 함수가 만나는 점의 개수가 $h(t)$인데

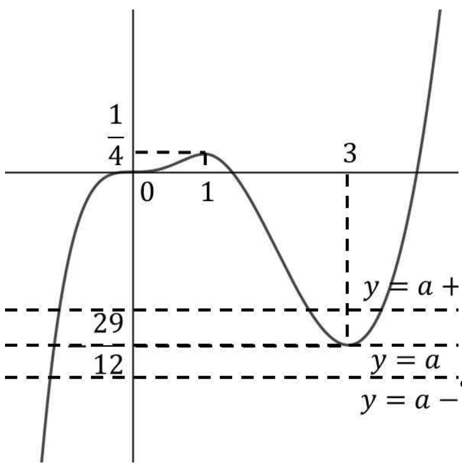
$\left| \lim_{t \to a+} h(t) - \lim_{t \to a-} h(t) \right| = 2$를 만족시키는 a를 구해야 해요.

저 식은 뭔가요? 일단 $\lim_{t \to a+} h(t)$는 $y = a+$와 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수구요, $\lim_{t \to a-} h(t)$는 $y = a-$와 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수에요. 그러니까 다시 말하면 $y = a$보다 큰 쪽에서의 수평선과 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수와 $y = a$보다 작은 쪽에서의 수평선과 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수의 차이가 2개가 되는 a를 찾으라는 거네요.

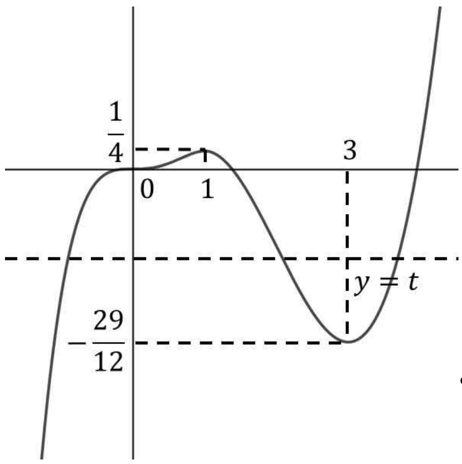
그럼 이제 막 $y = t$를 설정해봅시다.



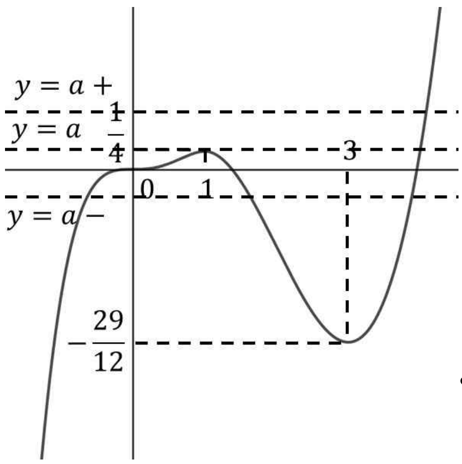
이렇게 설정하면 $y = t$보다 약간 작거나 약간 크거나 상관없이 만나는 점의 개수는 1입니다. 차이가 2만큼 날 수가 없겠네요.



이렇게 설정하면 약간 클 때는 3개, 약간 작을 때는 1개니까 차이가 2만큼 나네요. 일단 $a = -\frac{29}{12}$ 하나는 찾았어요.



이렇게 설정하면 변하지 않아요. 계속 3개잖아요.



이렇게 설정하면 되죠. 클 때는 1개, 작을 때는 3개니까 차이가 2잖아요. $a=\frac{1}{4}$도 됩니다.

그 위로는 계속 1개니까 안 되겠네요. 지금까지 찾은 a에 절댓값 씌우고 더하면 $S=\frac{1}{4}+\frac{29}{12}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$입니다.

$30S=80$이네요.

3. 정답 ⑤

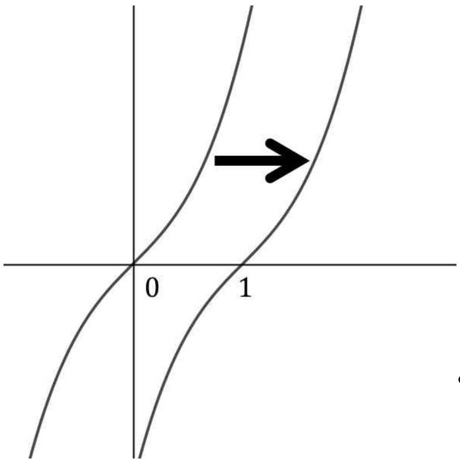
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 함수가 있어요. $f(x)=(x-1)^3+(x-1)$가 있네요. 함수를 이런 방식으로 준 건 이유가 있겠죠?
미분하지 말고 그래프를 그려봅시다.

일단 $f(x)$는 x^3+x라는 함수를 x축방향으로 1만큼 평행이동한 함수에요. 따라서 x^3+x를 먼저 그리고 그

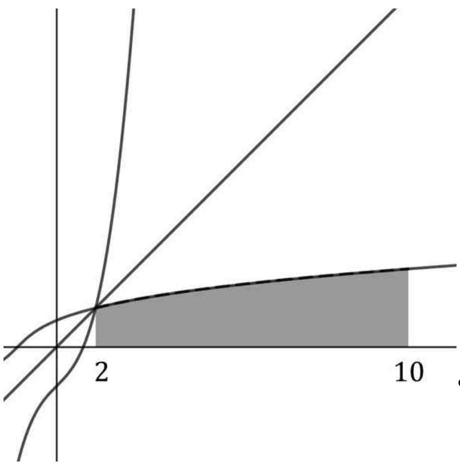
그래프를 1만큼 오른쪽으로 움직이면 되겠어요.

$x^3+x=x(x^2+1)$이니까 x축과는 $x=0$에서만 만나구요, 미분하면 $3x^2+1$이니까 극점없이 계속 증가하는 그래프입니다.



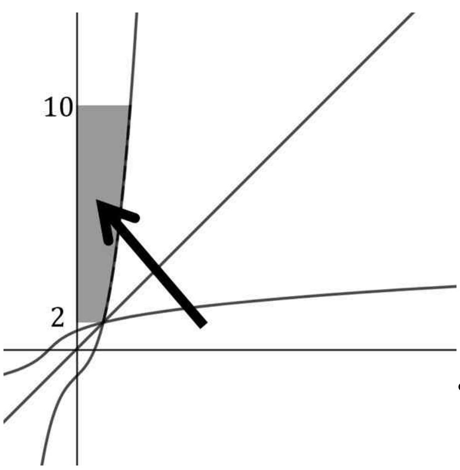
이렇게 되네요.

이때 역함수가 $g(x)$인데 $\int_2^{10} g(x)dx$를 구하랍니다. 이것도 그리고 넓이를 색칠해봅시다.



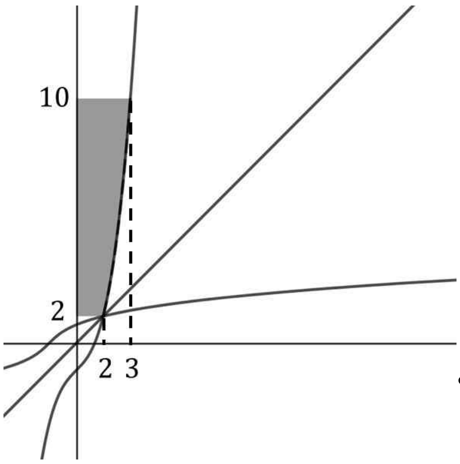
이렇게 되네요.

역함수를 적분할 수는 없으니 이걸 $y=x$축 대칭시킨 부분에 옮겨야겠죠?



이렇게 됩니다.

이제 식을 세워봅시다. 일단 $y=(x-1)^3+(x-1)$와 $y=2$가 만나는 점은 $(x-1)^3+(x-1)=2$이고 정리하면 $x=2$가 나옵니다. 그리고 $y=(x-1)^3+(x-1)$와 $y=10$이 만나는 점은 $(x-1)^3+(x-1)=10$이고
정리하면 $x=3$이 나오게 돼요!



이렇게 되네요.

이거는 밑변의 길이가 3이고 높이가 10인 직사각형에서 $\int_2^3 f(x)dx$와 한 변의 길이가 2인 정사각형을 뺀 거죠?
직사각형의 넓이는 $3\times10=30$이구요, 정사각형의 넓이는 $2\times2=4$입니다.

$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left((x-1)^3+(x-1)\right)dx=\left[\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^2}{2}\right]_2^3=\frac{21}{4}$이네요. 따라서 구하는 부분의 넓이는

$30-4-\frac{21}{4}=\frac{83}{4}$입니다. 답은 ⑤번이네요.

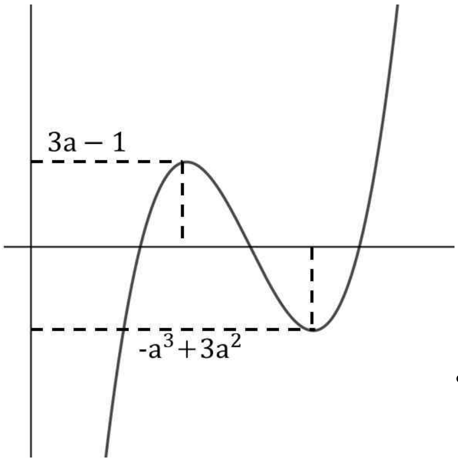
4. 정답 160

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

함수가 있어요. 일단 관찰부터 해볼까요? $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$를 인수분해하면
$x\left(2x^2-3(a+1)x+6a\right)$가 되는데 인수분해가 안 되네요? 이건 그래프를 그려서 파악해야겠어요.

미분하면 $f'(x)=6x^2-6(a+1)+6a=6\left(x^2-(a+1)x+a\right)=6(x-1)(x-a)$입니다. a가 자연수인데 $a=1$이라면 $f(x)=0$이 세 실근을 갖는 건 불가능합니다. 계속 증가하는 모양이잖아요. 일단 $a\geq2$이어야 합니다.

그러면 $x=1$에서 극대, $x=a$에서 극소네요. 극댓값은 $3a-1$이고 극솟값은 $-a^3+3a^2$입니다.

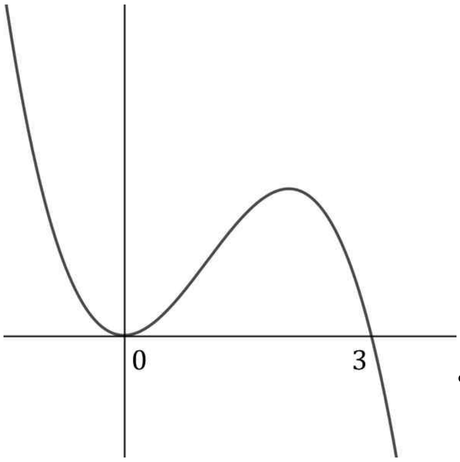


이렇게 되네요.

세 실근을 가지려면 $3a-1>0$이고 $-a^2(a-3)<0$이어야겠죠?

$a>\dfrac{1}{3}$은 뭐 어차피 a가 $a\geq 2$인 자연수니까 당연한 거구요. $-a^2(a-3)<0$가 되는 걸 찾아봅시다.

$-a^2(a-3)$을 그려보면 $a=0$에서 a축에 접하고, $a=3$에서 그냥 지나가는



이런 함수가 됩니다. 이게 0보다 작으려면 결국 $a>3$이 되어야겠네요.

이걸 만족하는 자연수 a는 4, 5, 6, $\cdots$입니다. n번째 수를 a_n라고 했으니까 $a_n=n+3$이네요.

$a=a_n$일 때 $f(x)$의 극댓값이 b_n이랍니다. 방금 그려놓은 그래프를 보면 $3a-1$이 극댓값이었으니까

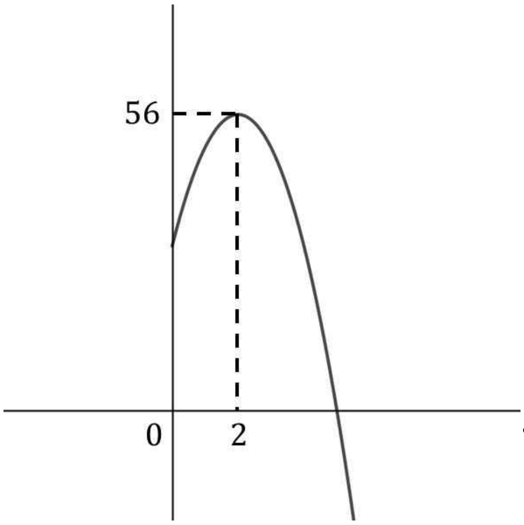
$b_n=3a_n-1=3n+8$이네요. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}2n+5=\frac{(7+25)}{2}\times 10=160$입니다.

5. 정답 56

1) 함수 구하기 - 인수정리

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 x축과 x좌표가 $-2t$, 0, t인 점에서 만난답니다. 다시 말해서 $f(x)=0$의 세 실근이 $-2t$, 0, t이라는 거죠? 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $(x+2t)$, x, $(x-t)$라는 인수를 적어도 하나 갖구요. $t>0$이니까 겹치지도 않네요. 따라서 $f(x)=x(x+2t)(x-t)=x^3+tx^2-2t^2x$입니다.

이때 $f'(4)$의 최댓값을 구하랍니다. 미분하면 $f'(x)=3x^2+2tx-2t^2$이고 $f'(4)=-2t^2+8t+48$입니다. 이거의 최댓값을 구하려면 t를 변수로 해서 그래프를 그림 다음 판단해야 할 것 같은데요? 일단 미분하면 $-4t+8$으로 $t=2$에서 극대입니다. 극댓값은 56이구요. 그림 그려보면



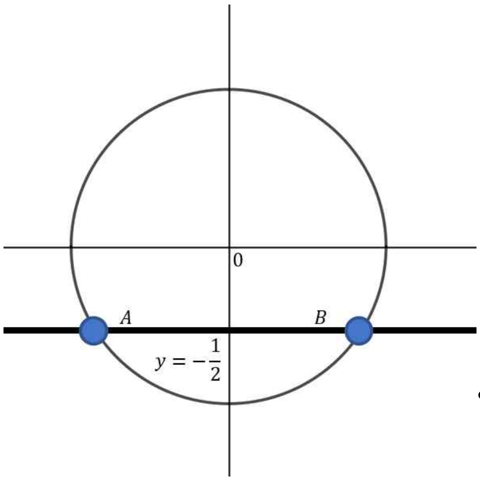
입니다. 최댓값은 $t=2$일 때 56이죠?

6. 정답 ③ (그림 다시 해야 함)

1) 문제해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

중심이 (0, 0)이고 반지름의 길이가 1인 원이 있는데 이 원이랑 $y=-\dfrac{1}{2}$가 만나는 점을 A, B라고 한답니다.

대충 그래프 그려보면

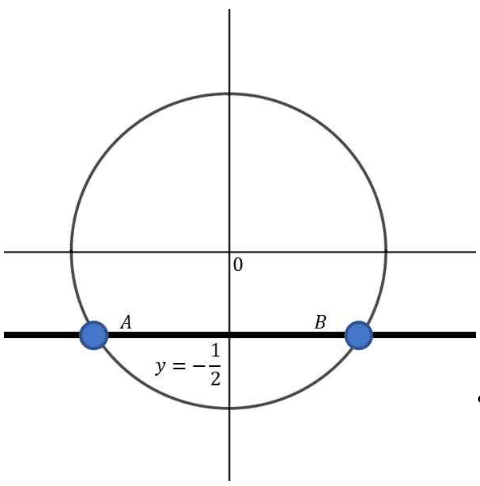


이렇게 되겠네요. 거기에 $\mathrm{P}(0,\, t)\left(t \neq -\frac{1}{2}\right)$가 있는데 다음 조건을 만족시키는 점 C의 개수를 $f(t)$라고 한답니다.

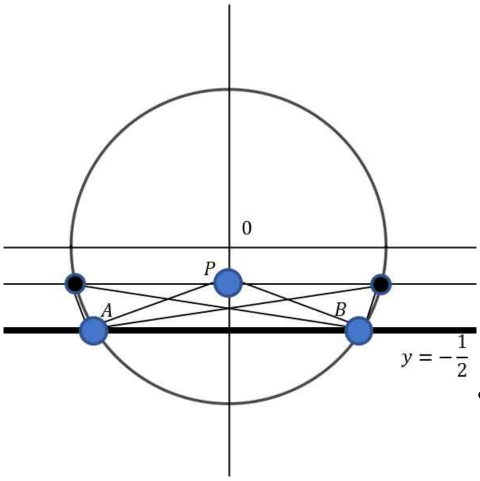
2) 조건해석

(가)조건에서 C는 A, B가 아닌 원 위의 점이네요.

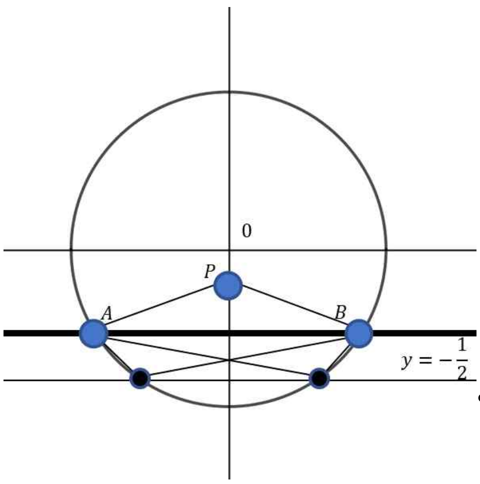
(나)조건에서 삼각형 ABC의 넓이와 ABP의 넓이는 같답니다. 이 두 조건을 만족하는 점 C의 개수를 $f(t)$라고 하는 거죠. 무슨 의미일까요? 그러면 일단 $\mathrm{P}(0,\, t)$의 좌표를 아무거나 잡아봅시다. $f(t)$를 이해는 해야 하잖아요. 예를 들어



이렇게 P를 잡아볼게요. 저 삼각형과 넓이가 같으려면 원 위의 점을 어떻게 잡아야 할까요? 밑변이 고정되어 있으니까 높이만 같으면 되겠죠? 아! 그러면 P를 지나고 x축에 평행한 직선을 그어서 그 직선이 원과 만나는 점을 C라고 하면 되겠네요.



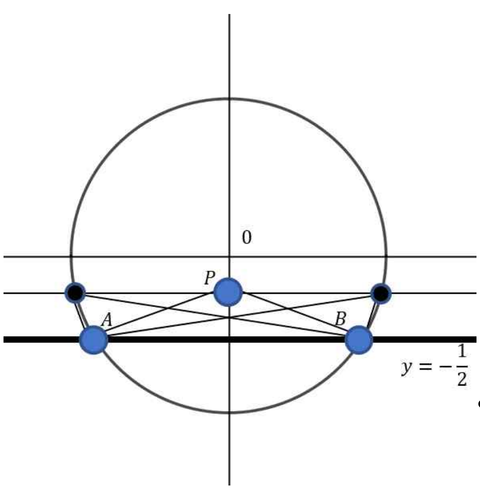
이렇게 2개의 검은색 점을 잡으면 되죠. 이게 끝일까요? 잘 생각해보세요.



이렇게 아래로 긋는 건 안 되나요? 높이가 같으니까 괜찮죠? 아~

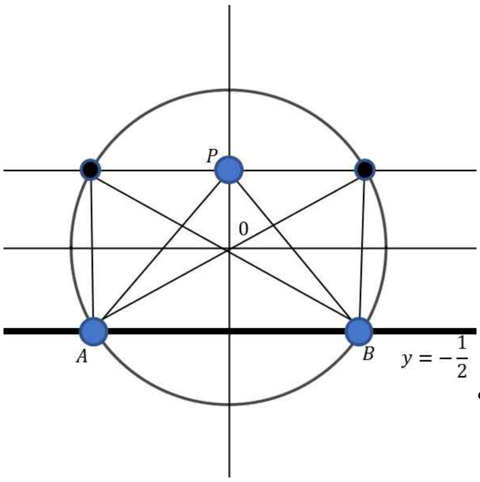
그러면 $f(t)$는 점 P를 지나는 직선과 원과 만나는 점 2개와 직선을 $y=-\dfrac{1}{2}$축 대칭시켜서 원과 만나는 점 2개 이렇게가 가능한가봐요.

어라? 그런데 점 P가 원점이라면 $y=-\dfrac{1}{2}$축 대칭시켜서 원과 만나는 점이 1개밖에 없는데요?



이렇게 3개밖에 안 되잖아요. 그리고 만약 $t>0$이라서 점 P가 x축

위로 올라가 버리면



아래로 내려갈 수가 없어요. 점 P의 위치에 따라 $f(t)$의 값이 달라지네요. 뭐 이 정도면 해석은 충분히 한 것 같아요.

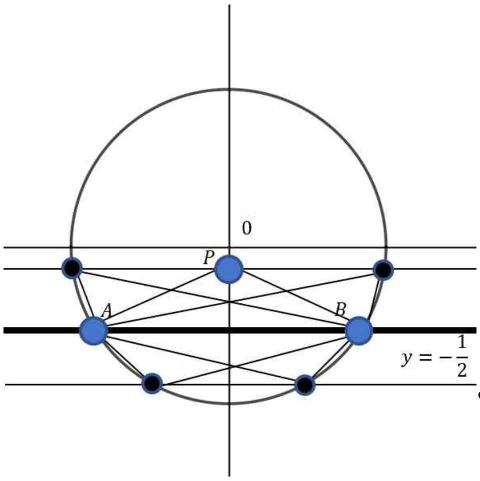
이제 $f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$이고 $\lim_{t\to 0-}f(t)=b$일 때 $a+b$의 값을 구해봅시다.

2) $\lim_{x\to\alpha+}f(x)=$ $x=\alpha$보다 큰 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값, $\lim_{x\to\alpha-}f(x)=$ $x=\alpha$보다 작은 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값

$f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$이거부터 해볼까요? $\lim_{t\to a-}f(t)$는 $t=a$보다 작은 쪽에서의 $f(t)$의 함숫값이죠? 어라? 그런데 잘 생각해보세요. 일반적인 상황에서는 $f(a)$의 값과 $\lim_{t\to a-}f(t)$의 값이 다를 리가 없어요. 약간 작다고 값이 변하지 않잖아요. 그러니까 $f(a)$와 $\lim_{t\to a-}f(t)$를 더해서 5가 나올 리가 없다는 거죠.

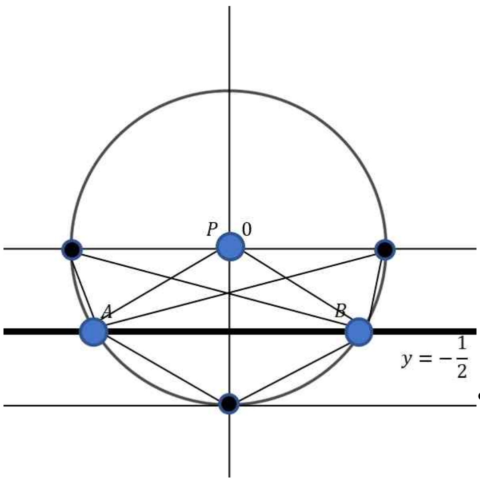
보통의 경우에는 $1+1=2$, $2+2=4$, $3+3=6$이렇게 되겠죠. 그런데 $f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$라는 건 $f(a)$의 값과 $\lim_{t\to a-}f(t)$의 값이 달라지는 부분이라는 거에요. 그러면 a는 굉장히 특수한 부분이겠죠? 아까 $f(t)$를 해석할 때 갑자기 값이 변하는 부분이 있었죠? 다시 가봅시다.

만약 $-\frac{1}{2}<a<0$이라면



이죠? $f(a)$와 $\lim_{t \to a-} f(t)$의 값이 같으니까 여긴 아니네요. 값이

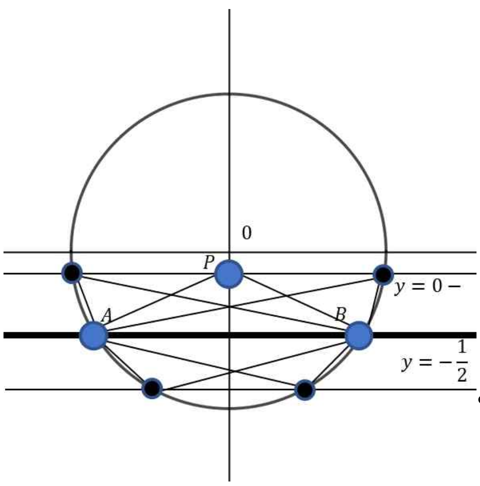
변하는 부분을 찾아야 해요. 값이 변하는 부분은



이렇게 원점일 때가 있어요. 이때는 그림에서 보는 것처럼

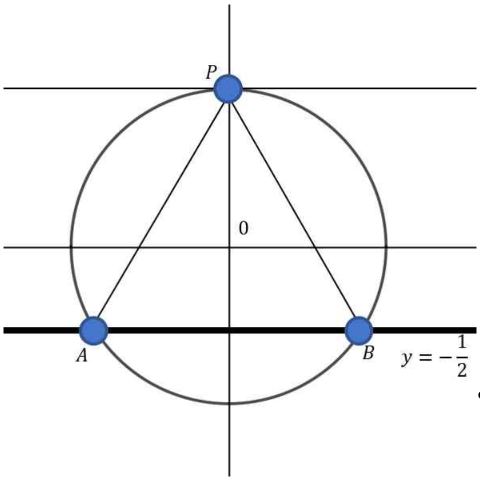
$f(0)=3$입니다.

그리고 $\lim_{t \to 0-} f(t)$은 $t=0$일 때보다 약간 작아야 하잖아요.



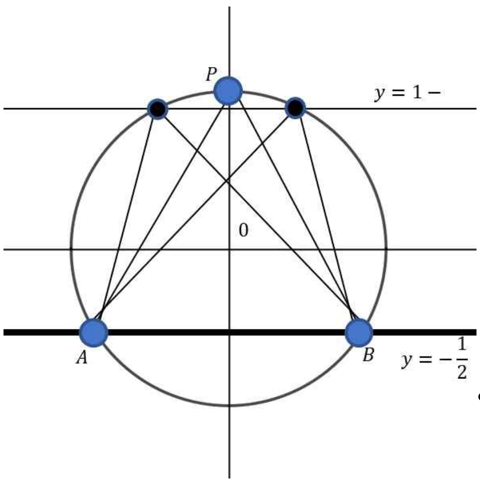
이런 그림처럼 말이죠. 4개가 가능하죠? $\lim_{t \to 0-} f(t)=4$입니다. 더해서

5가 아니네요? 다른 거 찾아봅시다.

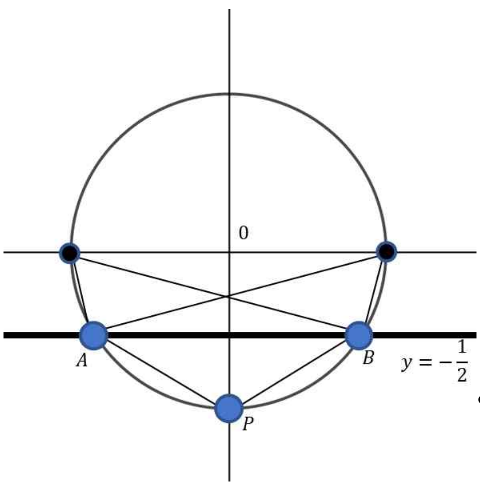


이렇게 $t=1$일 때도 되네요. 이 경우 $f(1)=1$이네요? 가능한 게 점 P와 같을 때 하나가 있네요.

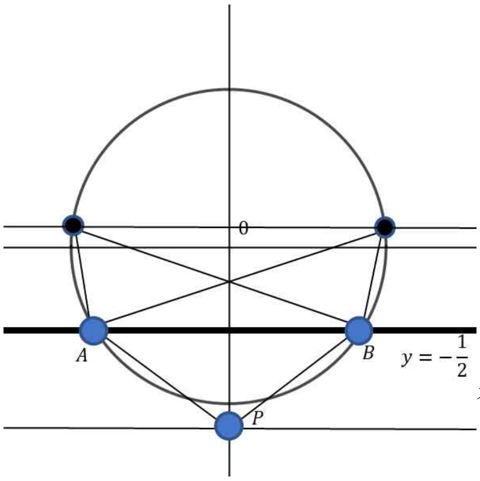
$\lim_{t\to 1-} f(t)$은 $t=1$일 때보다 약간 작아야 하는데



이런 그림처럼 되겠군요. $\lim_{t\to 1-} f(t)=2$입니다. 더해서 5가 안 나오는데요? 어... 또 값이 변하는 부분이 뭐가 있을까요?



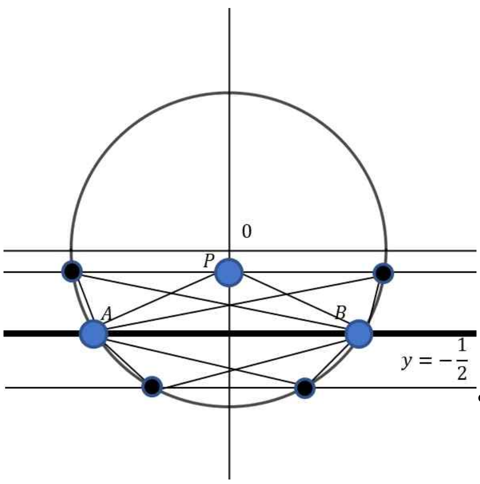
이렇게 $t=-1$일 때도 있죠? 검은색 점 2개에다가 점 P와 같을 때도 있으니까 총 3개라서 $f(-1)=3$인데 t가 -1보다 약간 작으면



점 P가 이렇게 원 밖으로 나가버리면서 위쪽에만 2개가 가능하네요.

$\lim_{t \to -1-} f(t) = 2$입니다. 오! 더해서 5가 되네요! $a = -1$입니다.

이제 $\lim_{t \to 0-} f(t) = b$이거 해봅시다. 아까 해봤었죠? $t = 0$보다 약간 작을 때의 함숫값이니까



이거잖아요. 4개네요. 따라서 $\lim_{t \to 0-} f(t) = b = 4$입니다.

$a + b = 4 - 1 = 3$이네요. 답은 ③번입니다.

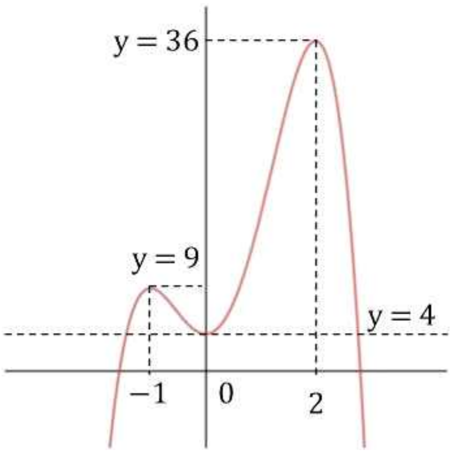
7. 정답 36

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

a가 35이하인 자연수래요! 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

그리고 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$라고 합니다. 관찰부터 해봅시다. 인수분해는.... 쉽지 않은 것 같네요.

미분해서 극점 찾아봅시다. $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x = -12x(x+1)(x-2)$이니까 $x=-1,\ 2$에서 극대, $x=0$에서 극소입니다. $f(-1)=9,\ f(0)=4,\ f(2)=36$이네요.



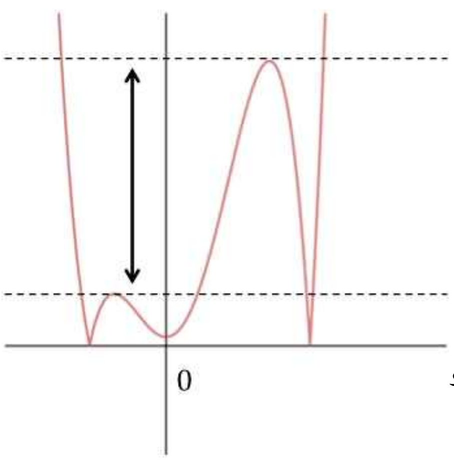
이렇게 되네요.

2) 절댓값 함수

이때 $g(x) = |f(x) - a|$라고 합니다. 일단 $f(x) - a$는 $f(x)$를 a만큼 아래로 내린 함수에요. 그 함수를 절댓값을 씌워서 접어 올린 거죠.

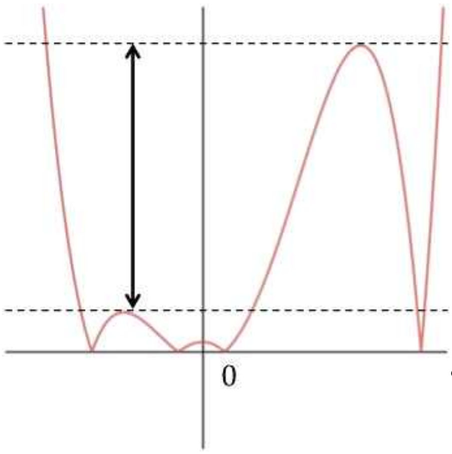
3) 조건해석

(가)조건에서 $y=g(x)$와 $y=b$가 4개의 점에서 만난다고 합니다. 그냥 스을쩍 그래프 그려서 확인만 해볼까요? 일단 위에 있는 $f(x)$를 a만큼 내리고 접어 올리면...! 어? 그런데 문제가 있어요. a가 얼마인지에 따라 접어 올렸을 때 $g(x)$의 개형이 달라지는데요? 만약 a가 1부터 극솟값인 4까지라면

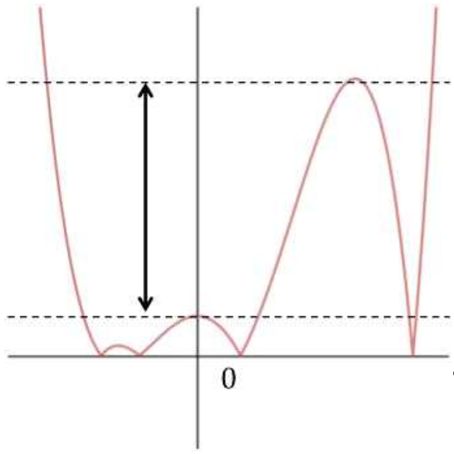


의 그래프는 이렇게 됩니다. 4개의 점에서 만나려면 $y=b$가 저렇게 화살표 사이에 있으면 되겠네요.

그런데 a가 극솟값보다 큰 5부터 극댓값인 9까지라면



이렇게 되거나

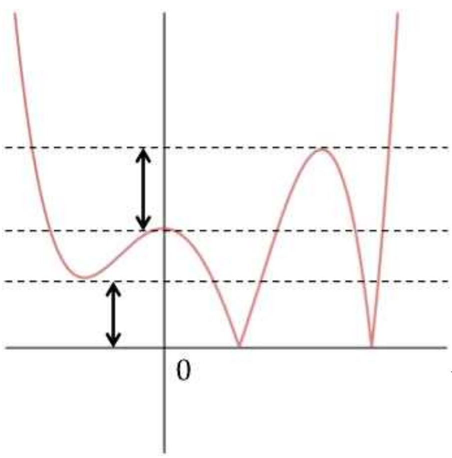


이렇게 됩니다.

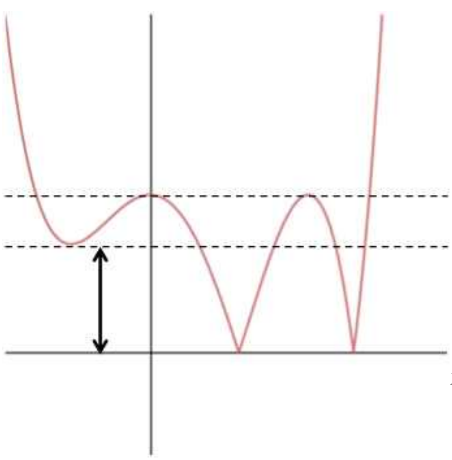
이거는 사실 $f(x)-a$의 극솟값인 $4-a$를 접어 올린 $a-4$와 극댓값인 $9-a$ 중 어느 게 더 큰가에 따라서 그래프가 갈리긴 해요. 그러니까 $a-4<9-a$ $\left(a<\dfrac{13}{2}\right)$이면 왼쪽의 그림이 그려지구요,

$a-4>9-a$ $\left(a>\dfrac{13}{2}\right)$이라면 오른쪽의 그림이 그려집니다. 아무튼 4개의 점에서 만나려면 $y=b$가 화살표 사이에 있어야 합니다.

a가 극댓값보다 큰 10부터 35까지일 때를 볼게요.

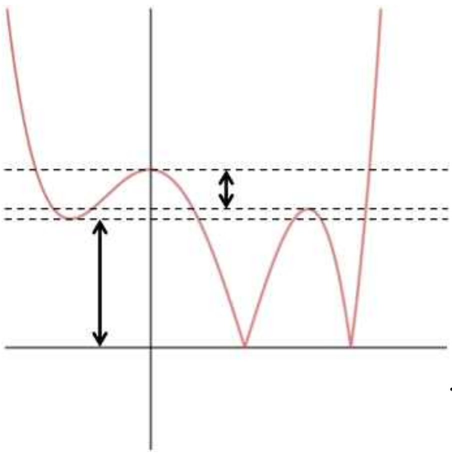


만약 $f(x)-a$의 극솟값인 $4-a$를 접어 올린 $a-4$보다 극댓값인 $36-a$가 크다면($a<20$이라면) 이렇게 그래프가 그려집니다. 화살표 사이에 있어야 하구요.



같다면? 이렇게 그려지죠. 이 경우는 특이하네요. 화살표 사이와 딱 한

번 4개의 점에서 만나는 부분이 있어요. 이 두 개의 경우만 4개의 점에서 만납니다.

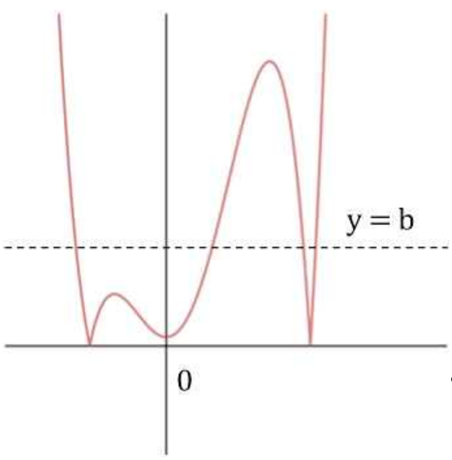


$f(x)-a$의 극솟값인 $4-a$를 접어 올린 $a-4$이 극댓값인 $36-a$보다 크다면($a>20$이라면)이렇게 됩니다. 이것도 사실 엄밀하게 따지자면 더 나눌 수 있는데... 일단은 넘어갈게요.
아무튼 화살표 사이에 있어야 합니다.
뭐 이정도가 $g(x)$의 개형인 것 같아요. (가)조건도 대충 해석이 된 것 같구요. 다음으로 가봅시다.

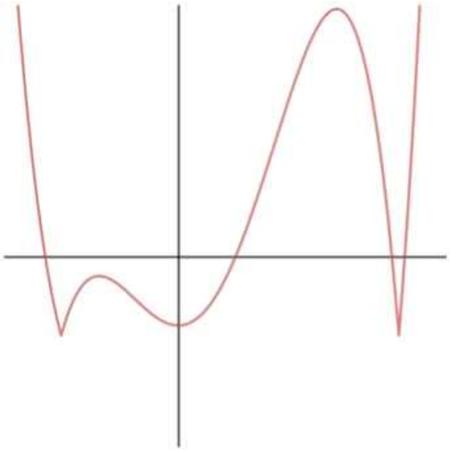
어이구야....(나)조건에서 $|g(x)-b|$가 미분불가능한 점이 4개랍니다. 하.... 절댓값으로 접어 올린 걸 또다시 접어 올려야 하네요. 딱 봐도 쉽지 않아 보이는데요? 그래도 아까 개형 다 나눠놨으니까 케이스 분류하고 천천히 가봅시다.

4-1) 케이스 분류

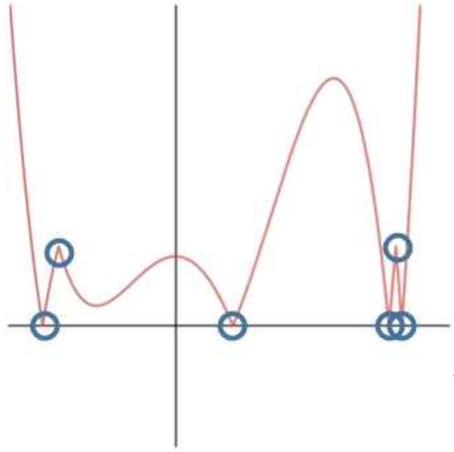
4-1-1) $1 \le a \le 4$일 때



이렇게 되는 거죠? 오? 그런데 $g(x)-b$라는 함수는 지금 보고 있는 $g(x)$를 b만큼 내린 함수잖아요. 그런데 지금 $y=g(x)$와 $y=b$가 만나네요? 이거 그대로 x축에 만나게끔 내리고 접어 올리면 되겠어요.



이렇게 내리고

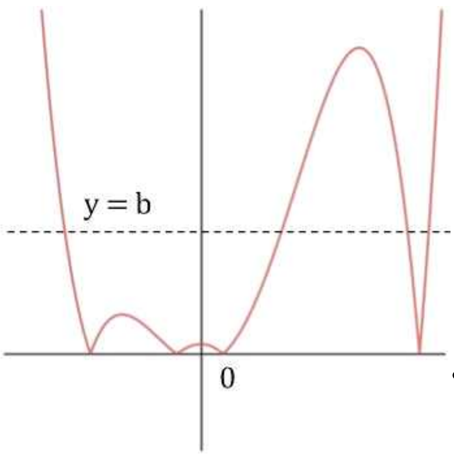


접어 올리면

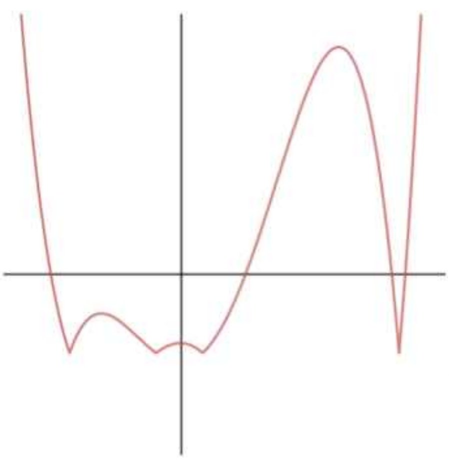
이렇게 됩니다. 미분불가능한 점이 6개나 되는데요?

4-1-2) $5 \leq a \leq 9$일 때

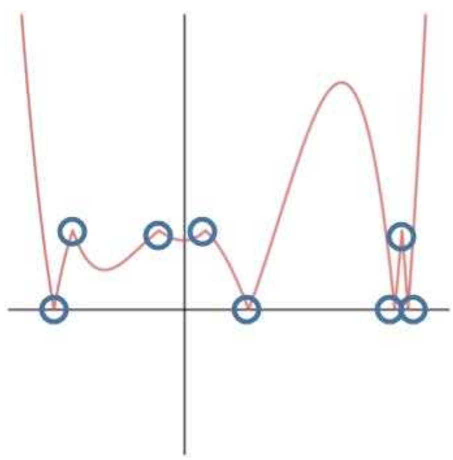
4-1-2-1) $5 \leq a \leq 6$일 때



이렇게 $y = b$를 긋고



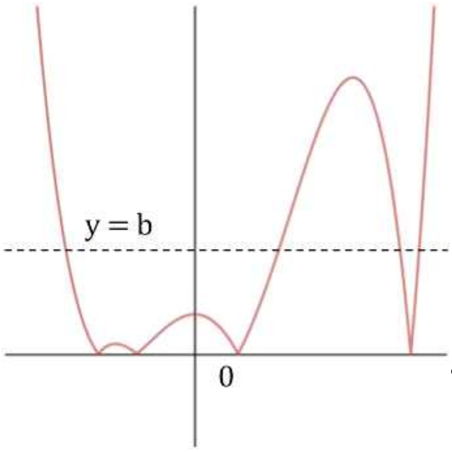
내리고, 접어 올리면



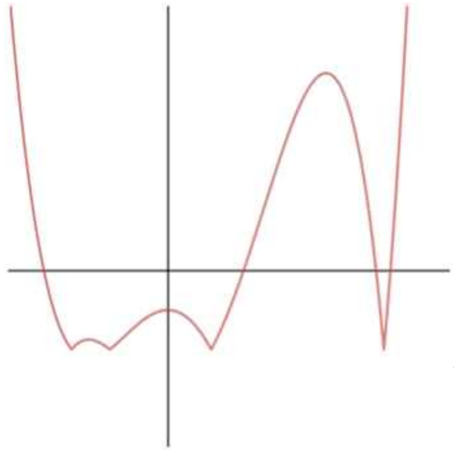
이렇게

됩니다. 안 되죠?

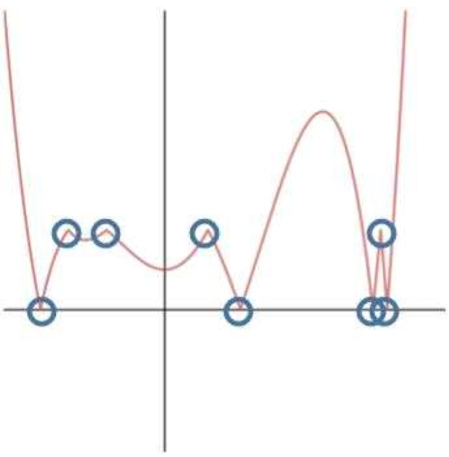
4-1-2-2) $7 \le a \le 9$일 때



이렇게 긋고



내리고 접어 올리면

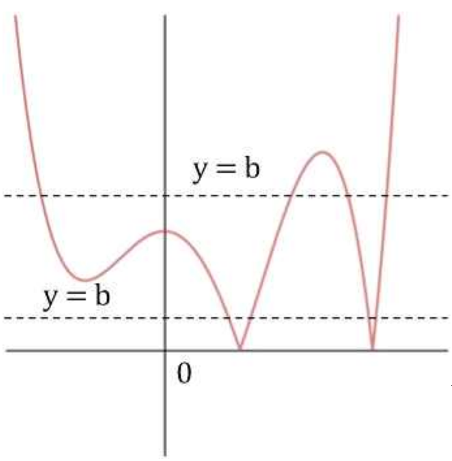


이렇게 되는데 안 되네요.

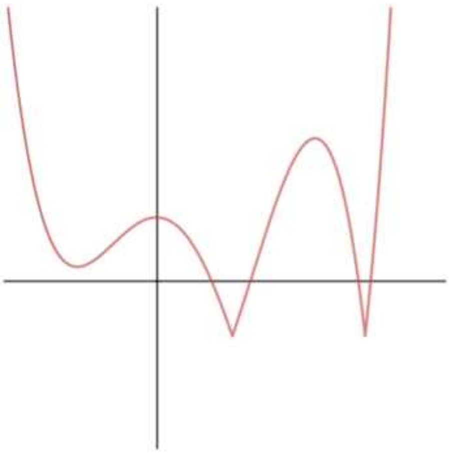
4-1-3) $10 \le a \le 35$일 때

4-1-3-1) $10 \le a \le 19$일 때

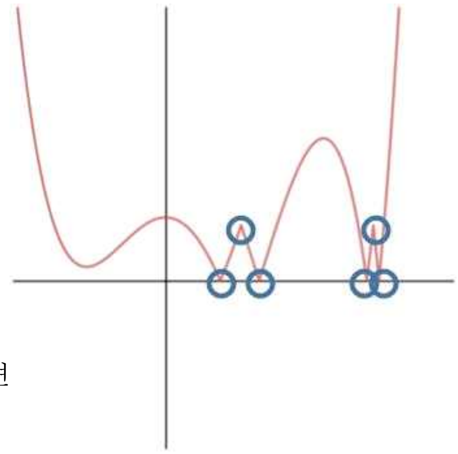
이거는 범위가 두 개였죠?



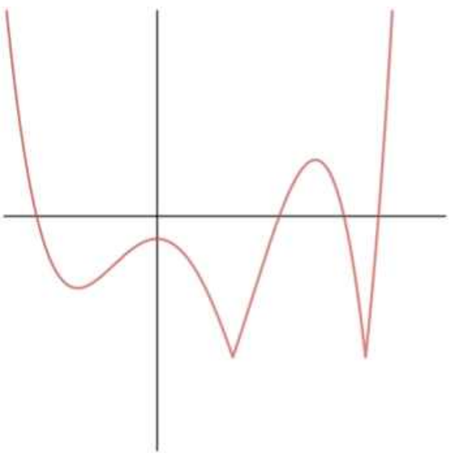
각각 확인해볼게요. 아래부터 확인해봅시다.



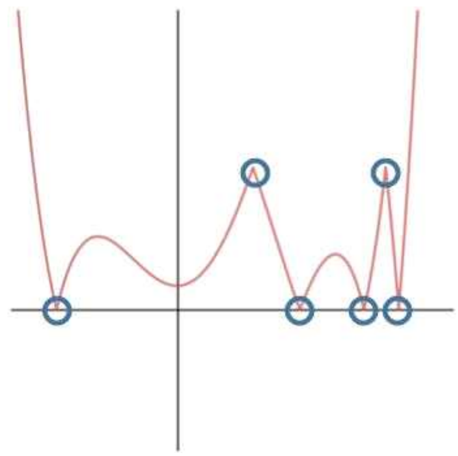
이렇게 내리고 접어 올리면



안 되네요.

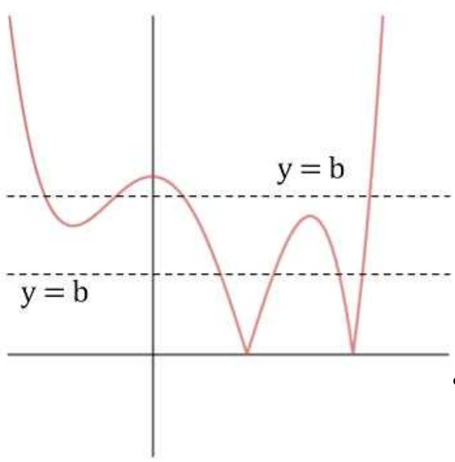


이렇게 내리고 접어 올리면

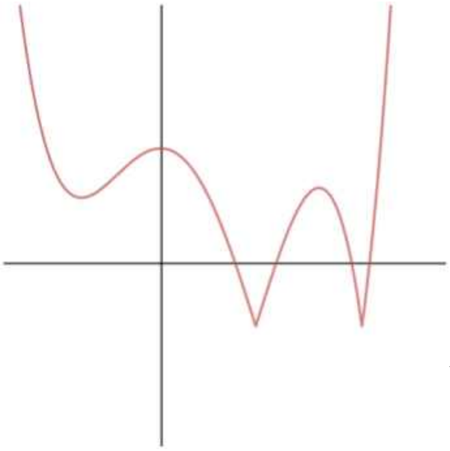
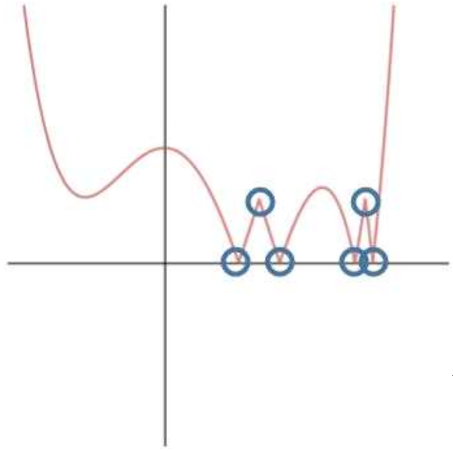


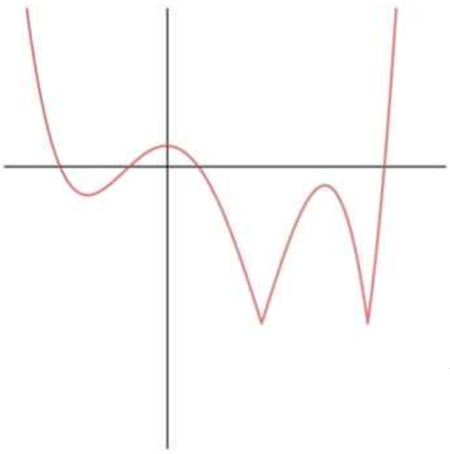
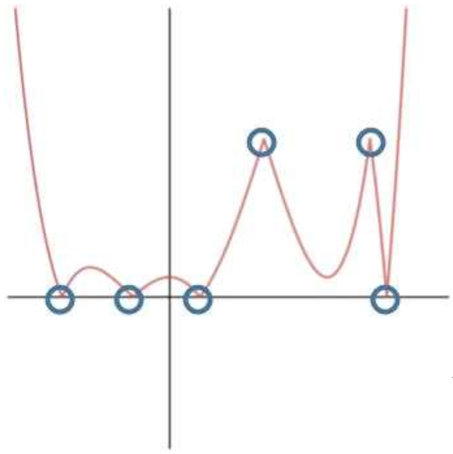
안 됩니다.

4-1-3-2) $21 \leq a \leq 35$일 때

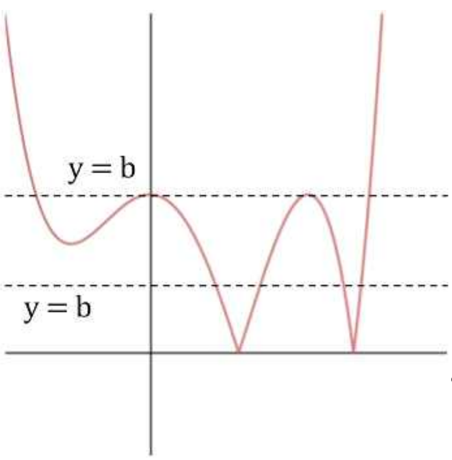


이렇게 두 개 확인해볼게요. 아까 말했듯이 이것도 사실 개형이 두 개로 나뉘긴 해요. 이거는 극댓값을 내린 $9-a$를 접어 올린 $a-9$와 극댓값을 내린 $36-a$ 중 어느게 더 크냐에 따라서 또 나뉘거든요. 그런데 내리고 접어 올렸을 때 양상이 같아서 생략할게요.

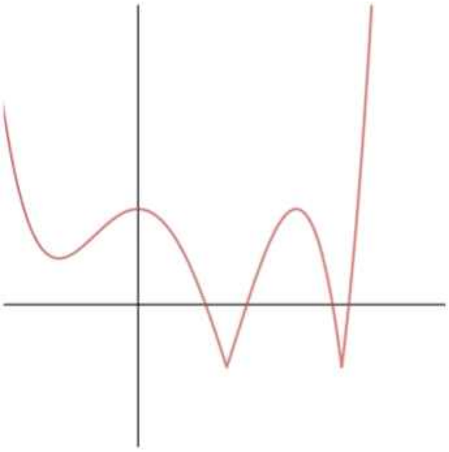

내리구요,

접어 올립니다. 안 되네요!


내리구요,

접어 올리면 안 되네요!

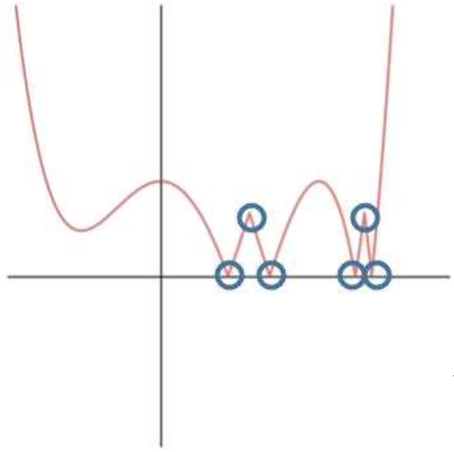
4-1-3-3) $a = 20$일 때



이렇게 설정할 수 있죠?

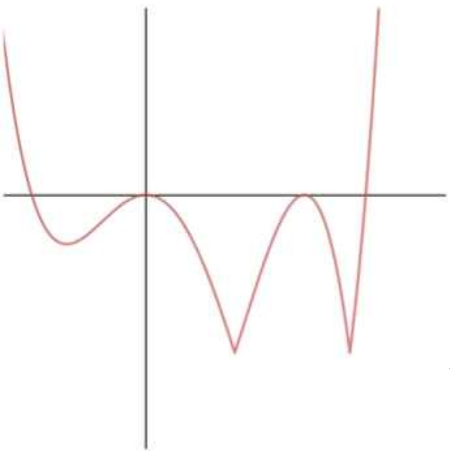


내리고

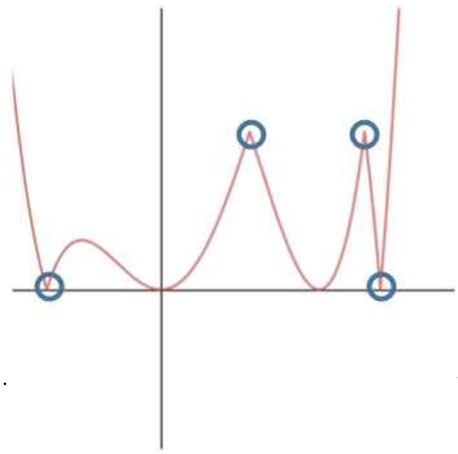


접어 올립니다.

안 되네요.



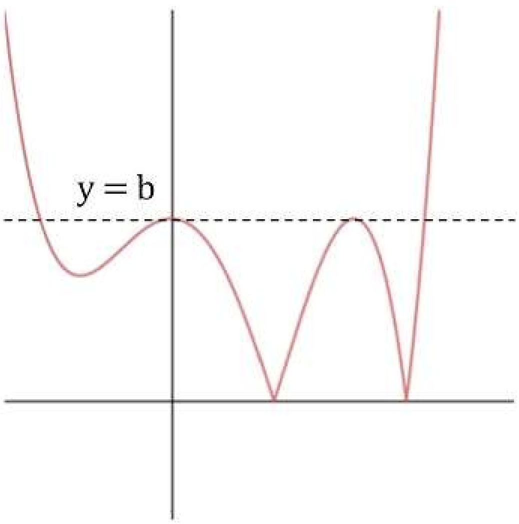
내리구요....



접어 올리면...

되네요!! 이거죠?

일단 $a=20$이에요. 그런데 b도 구해야 해요. 지금



이렇게 되는 거잖아요. $y=b$는 $f(x)-a$의 극댓값과 같은 거 아닌가요? $36-a=16=b$이네요. $a+b=36$입니다.

4-2) 조건해석

그런데 사실 접어 올리지 않고도 바로 개형을 찾을 수 있어요. 지금까지 이야기했던 거지만 접어 올릴 때 x축과 '그냥' 만나는 건, 그러니까 인수가 1개인 경우 접어 올리면 그 점에서 미분불가능이 되죠? 미분가능이 되려면 접선의 기울기까지 0이 되어야죠. 그런데 $f(x)-a$의 그래프들을 잘 관찰해보면 x축과 최소한 2개의 점에서는 '그냥' 만났어요. 그 말은 $g(x)$는 최소한 미분불가능한 점이 이미 2개가 있었다는 이야기에요. 그 상황에서 $y=g(x)$는 $y=b$와 4개의 점에서 만났고, b만큼 내린 $g(x)-b$도 마찬가지로 x축과 4개의 점에서 만나죠.

그런데 아까도 말했듯이 $g(x)$는 이미 미분불가능한 점이 2개 이상 가지고 있었어요. 만약 $f(x)-a$가 x축과 2개의 점에서만 '그냥' 만났다면 그걸 접어 올린 $g(x)$는 2개의 미분불가능한 점을 가지게 되잖아요. 그 상황에서 4개의 점에서 만나는 $y=b$를 긋고 내리고 접어 올렸을 때 4개의 점에서 미분불가능하려면 2개는 미분불가능한 점으로 추가가 되고 나머지 2개는 미분가능한 점으로 추가가 되어야 해요. 그래야 미분불가능한 점의 총 개수가 4개가 되죠. 다시 말해서 $g(x)-b$가 x축과 2개의 점에서 '그냥' 만나고 2개의 점에서 접해야 한다는 말이 됩니다.

이걸 다시 해석해볼까요? $y=g(x)$와 $y=b$가 2개의 점에서는 '그냥' 만나고 2개의 점에서는 접해야 한다는 말이 되겠네요.

만약 $f(x)-a$가 x축과 4개의 점에서 '그냥' 만났다면 4개의 점 모두 미분불가능한 점이 됩니다. 이 상황에서 $g(x)-b$를 접어 올려서 4개의 미분불가능한 점이 되려면 $g(x)-b$가 x축과 만나는 점들은 모두 '그냥' 만나서는 안 되고 접해야 합니다. 더 이상 미분불가능한 점이 추가가 되면 안 되거든요.

이걸 다시 해석하면 $y=g(x)$와 $y=b$가 만나는 점들은 모두 '그냥' 만나서는 안 되고 접해야 한다는 말이 됩니다. 앞으로 가서 모든 경우를 살펴보세요. $f(x)-a$가 x축과 4개의 점에서 '그냥' 만난 경우에 $y=g(x)$와 $y=b$가 만나는 점들이 모두 '그냥' 만나지 않고 접하는 경우는 없습니다. 최소한 1개씩은 '그냥' 만났어요.

그리고 $f(x)-a$가 x축과 2개의 점에서만 '그냥' 만난 경우에 $y=g(x)$와 $y=b$가 2개의 점에서는 접하게 되는 건 $a=20$이고 $b=16$인 경우 하나밖에 없습니다. 따라서 $a+b=36$입니다.

이거 사실 말로 써서 길고 복잡하게 보이는 거지 지금까지 절댓값 함수를 접어 올렸을 때 미분가능한 조건을 알고 있었다면 빠르게 할 수 있어요.

8. 정답 35

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

원점 O를 출발하는 P의 속도 $v(t)$가 $v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t-1 & (0 \le t < 2) \\ -t^2+10t-16 & (2 \le t < 8) \\ 2-\frac{1}{4}t & (8 \le t \le 16) \end{cases}$ 라고 합니다. 이때 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값을 구하라네요.

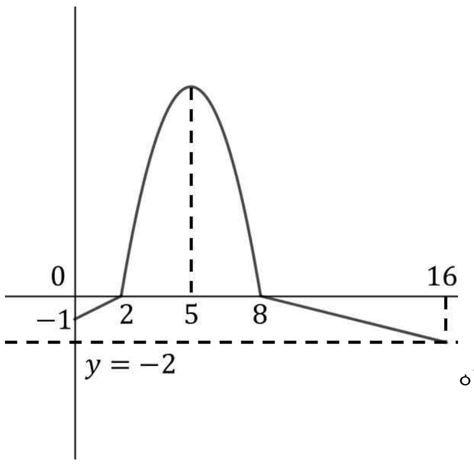
그러니까 원점 O와 P가 최대로 멀어진 길이를 찾으라는 거죠? 저번에도 말했듯이 P는 위치 그래프의 함숫값만큼 y축 위를 움직입니다. 원점은 $y=0$이구요. 원점에서 길이가 가장 멀어지려면 어떻게 해야 할까요? 함숫값이 가장 커져야겠죠.

아니죠? 함숫값이 가장 작아져도 됩니다. 길이는 절댓값을 씌워야 하잖아요? 최대값보다 최솟값이 절댓값을 씌웠을 때 크다면 거기서 길이가 최대가 되는 거겠죠. 그러니까 8과 -9가 있다면 9가 최대인 길이가 되는 거예요. 그러면 그래프를 그려봐야겠는데요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

그런데 생각해봅시다. 속도를 적분하면 위치가 되잖아요? 그러면 위치가 가장 커지거나 가장 작아지려면? 적분값이 최대가 되거나 적분값이 최소가 되면 되겠네요. 그러니까 $v(t)$를 0부터 적분해서 적분값이 가장 커지거나 가장 작아지는 부분을 찾아봅시다. $v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t-1 & (0 \le t < 2) \\ -t^2+10t-16 & (2 \le t < 8) \\ 2-\frac{1}{4}t & (8 \le t \le 16) \end{cases}$ 를 그려볼게요.

일단 $0 \le t < 2$에서 $v(t)=\frac{1}{2}t-1$이니까 $(0,\ -1)$, $(2,\ 0)$을 지납니다. 그리고 $2 \le t < 8$에서 $v(t)=-t^2+10t-16=-(t-2)(t-8)$이니까 $t=2,\ 8$에서 t축과 만납니다. 축은 $t=5$이구요. 그리고 $8 \le t \le 16$에서 $v(t)=2-\frac{1}{4}t$이니까 $(8,\ 0)$, $(16,\ -2)$를 지나구요. 그려보면



이렇게 됩니다.

지금 잘 보세요. 0부터 2까지 적분한 값은 밑변 2, 높이 1의 삼각형이니까 1이에요. 그리고 2부터 8까지 적분한 값은 $-(t-2)(t-8)$과 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이니까 $\frac{1}{6}\times(8-2)^3=36$이구요. 8부터 16까지 적분한 값은 밑변 8, 높이 2인 삼각형이니까 8이에요. 0부터 2까지, 그리고 8부터 16까지는 t축 아래에 있구요. 그러니까 적분하면 음수가 된다는 거예요.

그러면 0부터 적분했을 때 값이 가장 커지는 부분을 찾아보세요. 8까지이죠? $-1+36=35$잖아요. 16까지 적분하면 $-1+36-8=27$이니까 오히려 작아져요. 따라서 $t=8$일 때가 최대입니다.
그러면 길이는요? 위치가 곧 길이죠. 위치는 원점부터 멀어진 곳을 위치라고 하는 거잖아요. 물론 위치가 음수일 때는 절댓값을 씌운 것이 길이가 되지만 지금은 양수잖아요. 따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값은 35입니다.

9. 정답 ⑤

1) 조건해석

$f(x)$와 $g(x)$가 다항함수인데 (가)조건에서 $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서만 만난다고 합니다. 그러면 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근이 2개여야 한다는 거죠? 다시 말하면 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개여야 한다는 거예요.
$y=f(x)-g(x)$와 x축이 2개의 점에서만 만나야 한다는 거죠.

2) 함수 구하기 - 차함수

그런데 우리는 $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$를 알고 있잖아요. $y=f(x)-g(x)$의 형태로 만들기 위해서

차함수를 이용해봅시다. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 차함수에 의하여

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x^2-2x=x(x-2)$입니다. 그러니까 $y=h(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소가 되는 거죠.

$h'(x)$가 이차함수니까 $h(x)$는 삼차함수겠죠? 삼차함수가 x축과 두 개의 점에서 만난다는 건? 한 점에서는 접해야 한다는 거죠.

그런데 지금 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소잖아요? x축에 접하기 위해서는 $x=0$에서 접하거나 $x=2$에서 접해야 합니다. 다시 말하면 $h(0)=0$이거나 $h(2)=0$이어야 한다는 거죠.

ㄱ에서 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대냐고 물어보네요. 이건 해봐야 알 것 같아요.

$f'(x)=x^2-4x$이니까 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소네요. $g'(x)=-2x$이니까 $g(x)$는 $x=0$을 축으로 하고 $x=0$에서 극댓값을 갖습니다. 모두 극대 맞네요? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$이냐고 물어보네요. 다시 말하면 $h(0)=0$이거나 $h(2)=0$이냐고 물어보는 거죠? 방금 $h(0)=0$이거나 $h(2)=0$이어야 한다고 했었잖아요. 맞네요?

3) 정적분 변수

ㄷ에서 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\geq 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이냐고 물어봅니다.

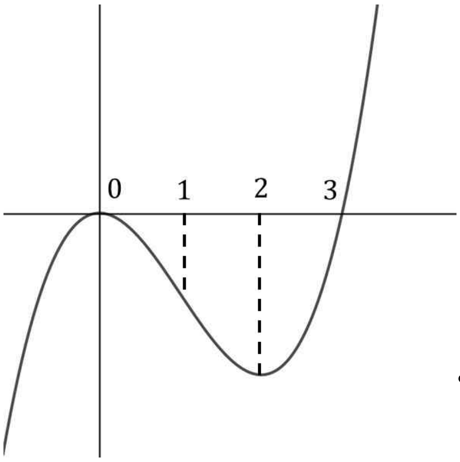
그러니까 $\int_{-1}^{x}h(t)dt$가 x축보다 항상 크거나 같으면 $x=1$에서의 함숫값이 2가 되냐는 거잖아요? 이건 그래프를 그려봐야 알겠는데요?

그런데 문제는 $h(0)=0$인지, $h(2)=0$인지를 몰라요. 그러면 케이스를 나눠야겠죠?

4) 케이스 분류, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

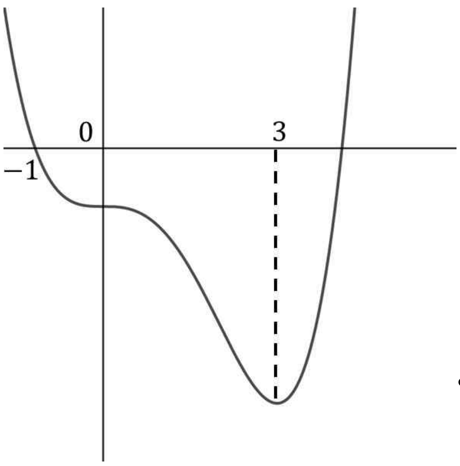
4-1) $h(0)=0$일 때

$x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소인데 $x=0$에서 x축과 접하니까 삼차함수의 비율관계에 의하여



이렇게 되겠죠?

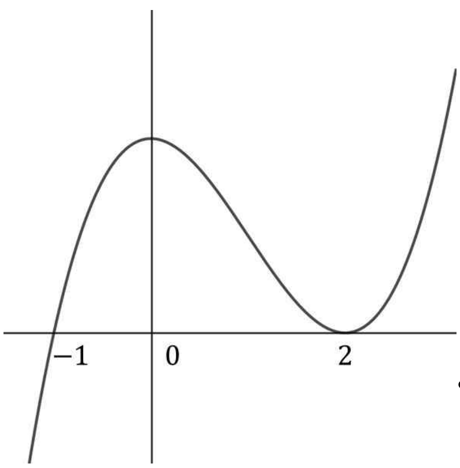
그런데 이 상태에서 적분을 한 번 더 해야 합니다. 그리고 $x=-1$에서 x축과 만나도록 적분을 해야 하죠. $x=0$에서는 접하면서 방향 그대로 지나가고, $x=3$에서는 극솟값을 갖는 함수입니다.



이렇게 되겠어요. 항상 x축보다 크거나 같나요? 아닌데요?

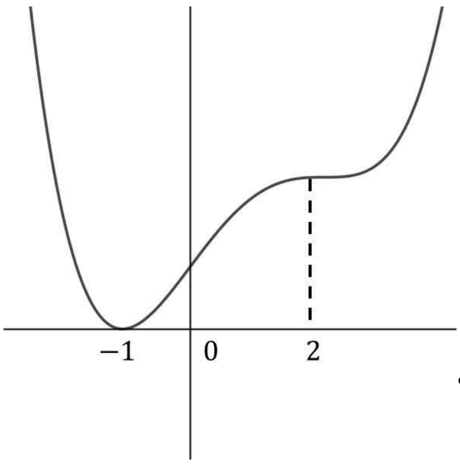
4-2) $h(2)=0$일 때

이러면 $x=2$에서 x축과 접하니까 삼차함수의 비율관계에 의하여



이렇게 될 거예요.

이 상태에서 한 번 더 적분해봅시다. $x=-1$에서는 극솟값을 갖고 $x=2$에서는 접하면서 방향 그대로 지나가는

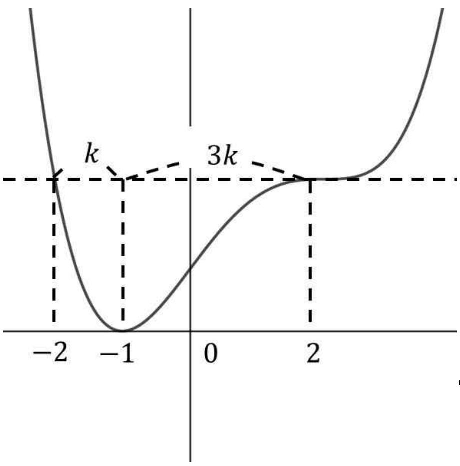


이런 그래프가 그려질 거예요. 이러면 항상 x축보다 크거나 같네요?

이거네요.

이때 $x=1$에서의 함숫값이 2인지를 확인해야겠죠? 일단 $h'(x)=x^2-2x=x(x-2)$이니까

$h(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$입니다. 거기에 사차함수에 비율관계에 의하여



이렇게 됩니다.

그림과 같이 $y=\displaystyle\int_{-1}^{x}h(t)dt$에 접하도록 $y=0$이 아닌 직선을 그었을 때 만나는 점을 x좌표가 작은 순서대로

α, β라 하면 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 $1:3$내분점은 극점의 x좌표가 되죠. $\displaystyle\int_{-1}^{x}h(t)dt$의 최고차항의 계수는

$\dfrac{1}{12}$이니까 $\displaystyle\int_{-1}^{2}h(x)dx=\int_{-1}^{-2}h(x)dx=k$라 하면 차함수에 의하여 $\displaystyle\int_{-1}^{x}h(t)dt-k=\frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3$이고

$\displaystyle\int_{-1}^{x}h(t)dt=\frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3+k$입니다. 여기서 $x=-1$에서의 함숫값이 0이니까 $k=\dfrac{9}{4}$이네요.

$\displaystyle\int_{-1}^{x}h(t)dt=\frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3+\frac{9}{4}$입니다.

$x=1$을 넣으면 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(t)dt=2$이네요. ㄷ도 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

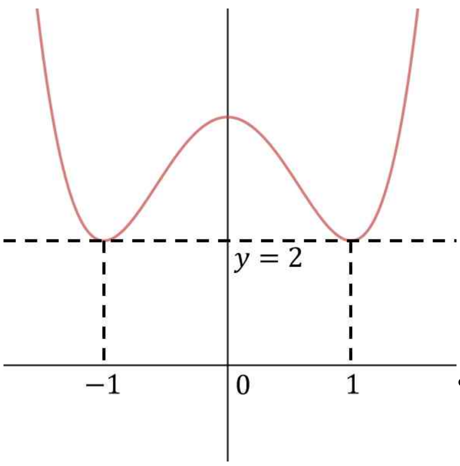
10. 정답 ⑤

1) 문제해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수인데 $f'(-x)=-f'(x)$라고 합니다. 이건 좀 특이하네요. 이거 원래는 기함수를 나타내는 표현이죠? 그런데 도함수가 기함수라고 합니다. 도함수가 원점대칭이고 $f'(0)=0$이에요.

이때 $f'(1)=0$이고 $f(1)=2$라고 합니다. 일단 $f'(x)$가 원점 대칭이니까 $f'(1)=0$이면 그 대칭부분에 있는 $x=-1$ 역시 $f'(-1)=0$이겠죠?

정리하면 $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$입니다. 생각나는 개형이 있죠? 거기다 $f(1)=2$이니까



이렇게 되겠네요.

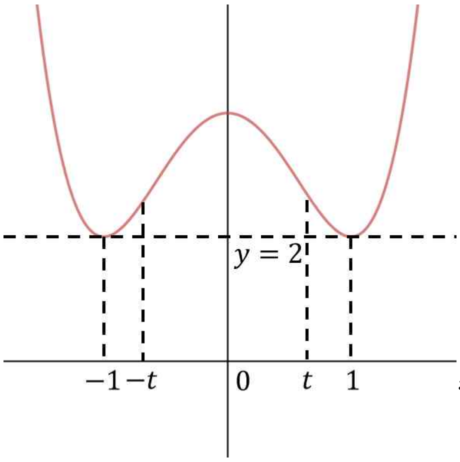
2) 함수 구하기 - 차함수

$y=f(x)$와 $y=2$가 $x=-1,\ 1$에서 접하고 있어요. 차함수에 의하여 $f(x)-2$는 $(x+1)$, $(x-1)$라는 인수를 각각 두 개씩 가집니다. 따라서 $f(x)-2=(x+1)^2(x-1)^2$이고 $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2+2$이네요.

ㄱ에서 $f'(-1)=0$냐고 물어보네요. 맞죠?

ㄴ에서 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$냐고 물어봅니다. 그러니까 다시 말해서 $x=0$에서 k만큼 앞으로 간 곳까지의 적분값과 $x=0$에서 k만큼 뒤로 간 곳에서의 적분값이 같냐고 물어보는 거죠?

저거 그래프 잘 보세요. $x=0$축 대칭함수 아닌가요?



$x=0$축에 대하여 대칭이니까 적분값은 같습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 $0<t<1$일 때 $\int_{-t}^{t} f(x)dx < 6t$이냐고 물어보네요. 음...

3-1) 적분 계산

그러면 진짜 적분해보면 되죠. $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2+2$이니까

$\int_{-t}^{t} f(x)dx = \int_{-t}^{t}\left((x+1)^2(x-1)^2+2\right)dx$입니다.

그런데 $f(x)$는 우함수잖아요? y축 대칭이니까요. 우함수의 특징은 $\int_{-t}^{t} f(x)dx = 2\int_{0}^{t} f(x)dx$이죠. 따라서

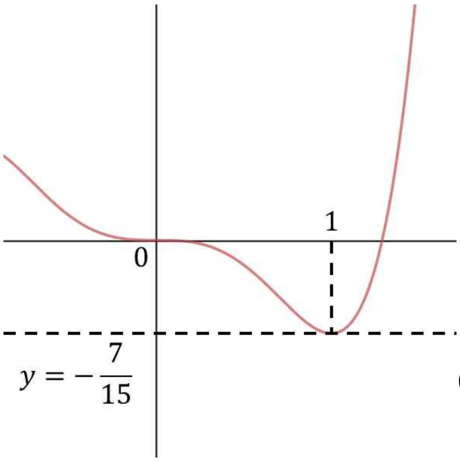
$\int_{-t}^{t}\left((x+1)^2(x-1)^2+2\right)dx = 2\int_{0}^{t}\left(x^4-2x^2+3\right)dx = 2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+3x\right]_0^t = 2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+3t\right)$입니다.

그러니까 우리는 $0<t<1$에서 $2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+3t\right)<6t$이고 $\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3<0$인지 확인해보면 되는 거죠.

그래프는 똑같이 그리면 됩니다. 일단 인수분해는 $t^3\left(\frac{1}{5}t^2-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5}t^3\left(t-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(t+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$이니까 $t=0$에서

t축에 접하고, $t=-\sqrt{\frac{10}{3}}$, $\sqrt{\frac{10}{3}}$에서 t축과 만나네요. 그리고 $t=1$에서 함숫값은 $-\frac{7}{15}$입니다. 미분 안

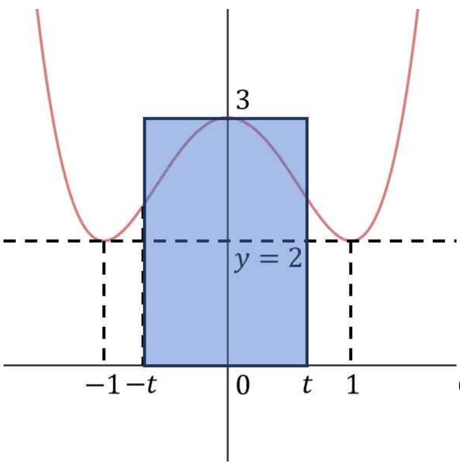
해도 그래프를 그릴 수 있겠는데요?



$0<t<1$에서 $\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3<0$맞죠? ㄷ은 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요. 그런데 5차함수를 그리는 게 맞는 풀이일까요? 뭐 그럴수도 있겠지만 출제자가 의도한 건 아니라고 생각하긴 합니다.

3-2) 정적분 관찰

$\int_{-t}^{t}f(x)dx<6t$에서 $6t$를 잘 관찰해보세요. 그리고 그래프도 잘 관찰해보세요. 지금 $f(0)=3$인데



$6t$라는 건 밑변의 길이가 $2t$이고 높이가 3인 직사각형 아닌가요?

그리고 $\int_{-t}^{t}f(x)dx$의 넓이를 비교해 보세요. 무조건 직사각형의 넓이가 크죠? 따라서 $\int_{-t}^{t}f(x)dx<6t$입니다. ㄷ도 맞네요. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요. 약간 발상적일 수 있긴 해요. 하지만 정적분할 때는 항상 관찰해야 합니다. 쉬운 풀이를 찾아낼 수 있거든요.

11. 정답 432

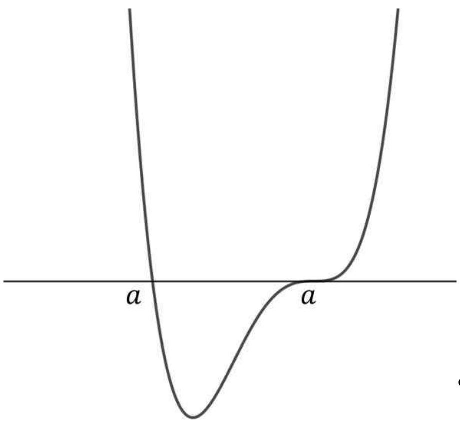
1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이구요. $g(x)=\int_t^x f(s)ds$라고 합니다. 일단 아래끝에 있는 $x=t$를 넣어보면 $g(t)=0$이 되네요. 그리고 미분하면 $g'(x)=f(x)$가 됩니다. $f(x)$가 $g(x)$의 도함수가 되네요.

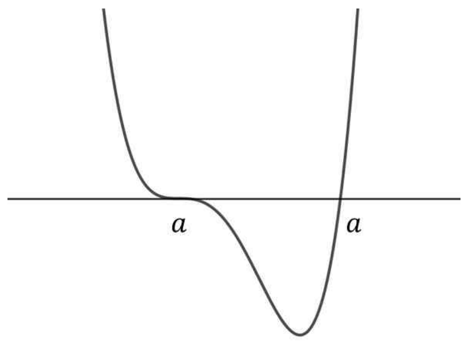
2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

(가)조건에서 $f'(a)=0$라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1개라고 합니다. 어? $g(x)$는 $f(x)$를 적분한 식이니까 사차함수잖아요. 사차함수가 접어 올렸을 때 미분가능하지 않은 x의 개수가 1개가 된다구요? 개형 바로 떠오르죠?

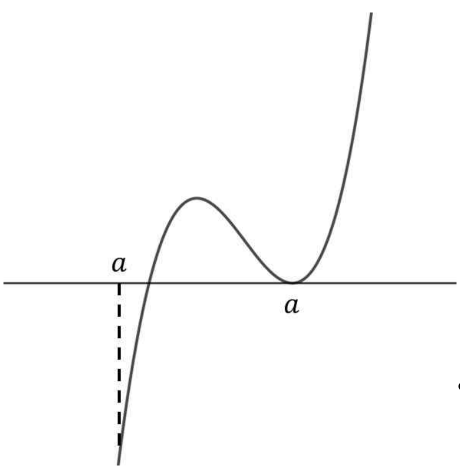


이렇게 되거나

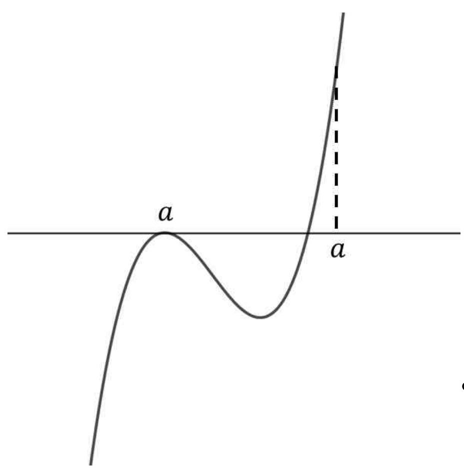


이렇게 됩니다.

그런데 아까 (가)조건에서 $f'(a)=0$라고 했잖아요. $g(x)$의 그래프로 $f(x)$의 그래프를 바로 그릴 수 있죠?

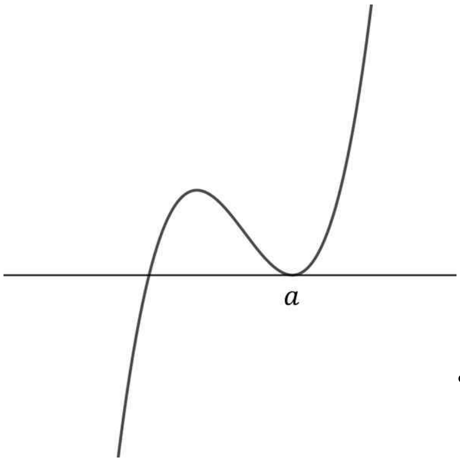


이렇게 되거나

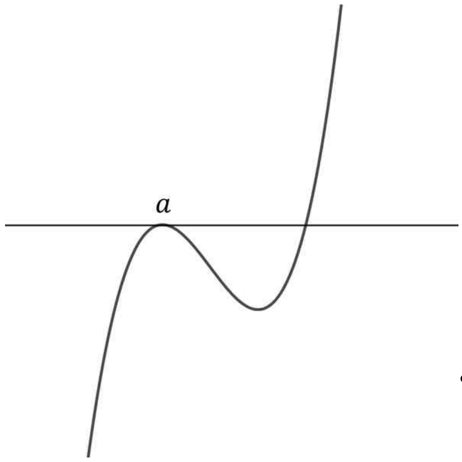


이렇게 될 거예요.

이 중에서 $f'(a)=0$인 경우는?

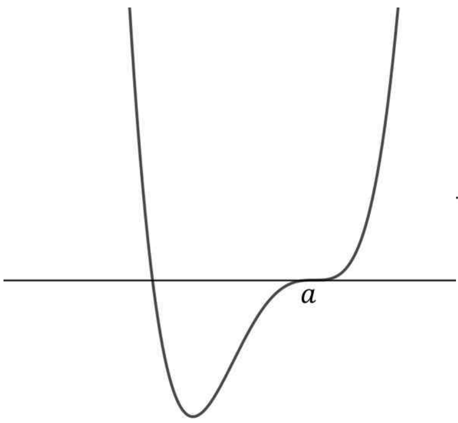


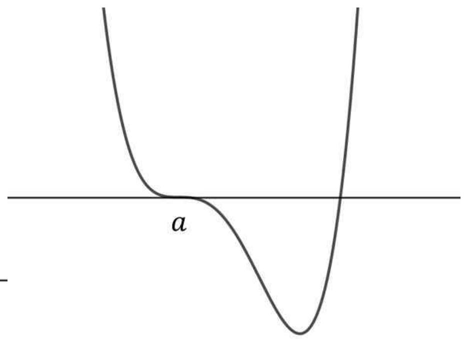
이거와



이거네요.

결국 $g(x)$에서 a의 위치는



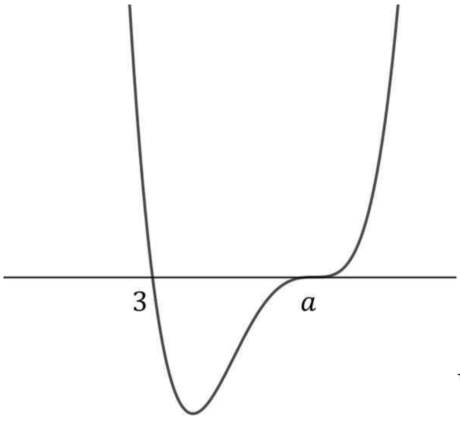


이렇게 되겠네요.

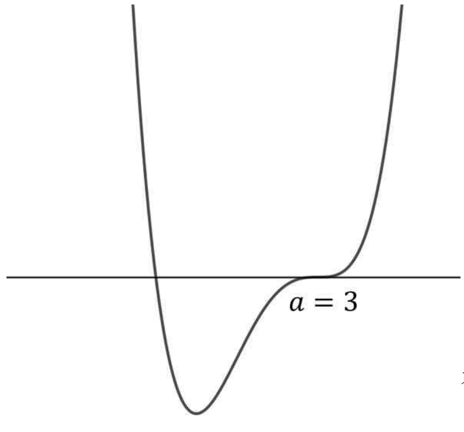
그리고 $g(a)$가 $h(t)$라고 합니다. $h(3)=0$이라고 하네요. 그럼 넣어봐야겠죠?

$t=3$일 때 $g(x)=\int_3^x f(s)ds$이구요, $g(3)=0$입니다. 그리고 $g(a)=0$이네요.

이러면 a와 3이 같냐, 다르냐에 따라서 경우가 좀 나뉘네요.

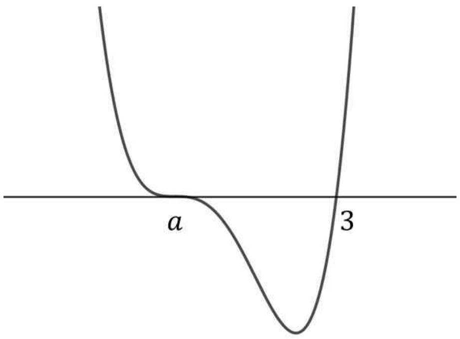


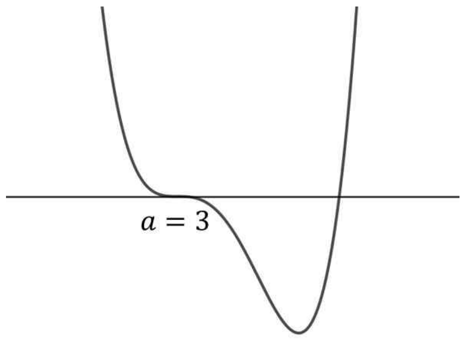
다르다면 이렇게,



같다면

이렇게 되구요,



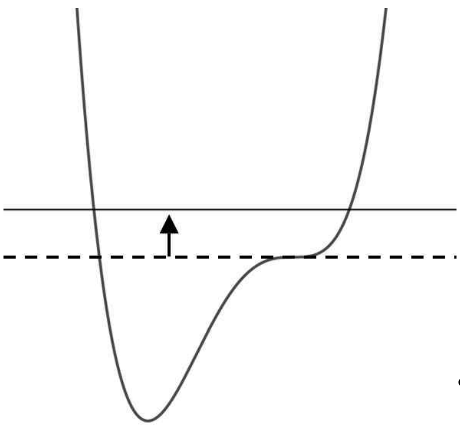


다를 때, 같을 때입니다.

그리고 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값 27을 가진대요. 그러면 $h(2)=27$이죠? $t=2$일 때 $g(x)=\int_{2}^{x} f(s)ds$이구요, $g(2)=0$입니다. 그리고 $g(a)=27$이에요.

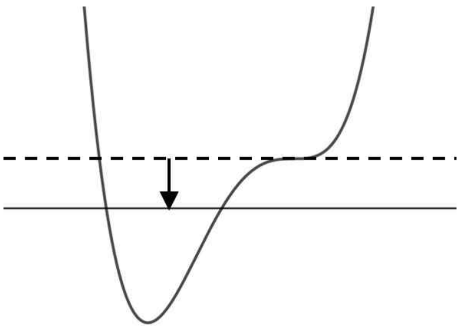
$t=2$에서 '최댓값'을 가진다고 했어요. 그러니까 $t=2$에서 $g(a)$의 값이 가장 크다는 이야기에요.

잘 생각해봅시다. 언제 최댓값을 가지게 되는 걸까요? 만약 $g(x)$가



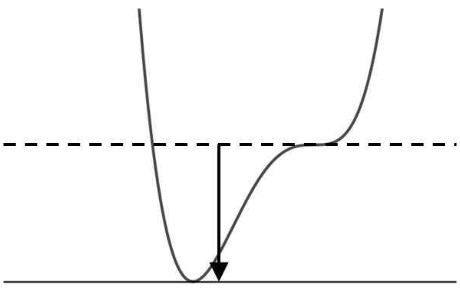
이렇게 된다면 $g(x)$를 위로 올려서 x축에 접하도록 해야 해요. 그래야 접어 올렸을 때 1개의 점에서만 미분불가능하게 되죠. 그런데 $g(x)$를 위로 올린다는 건 $g(a)$가 음수가 된다는 말이잖아요? 왜냐면 $g(x)-g(a)$니까요. $-g(a)$가 양수가 되어야 위로 올라가잖아요. 그러니까 $g(a)$가 음수가 되죠. 이러면 최댓값이 될 수가 없는데요?

만약



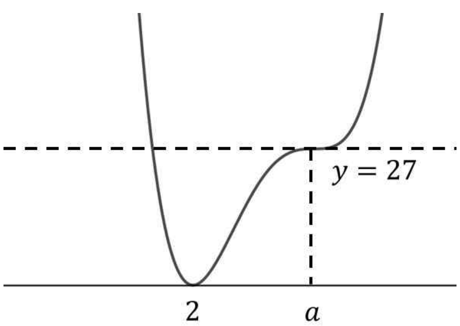
이렇게 살짝 위로 간다면요? 이러면 아래로 내려야죠. 그 말은 $g(a)$가

양수가 된다는 말입니다. 언제 최대가 될까요?

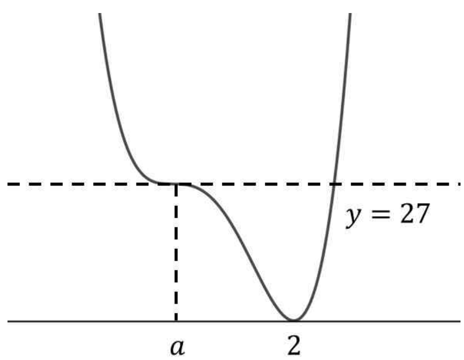


이럴 때죠. 그쵸? 만약 이거보다 위로 올라간다면 $g(t)=0$이 될 수가

없어요. x축과 안 만나는데요? 이 값이 27이고, $g(2)=0$이에요. 일단 x축과 만나는 점은 유일하네요. 그리고 27만큼 아래로 내렸을 때 x축과 접하게 되니까 결국 $g(x)$는

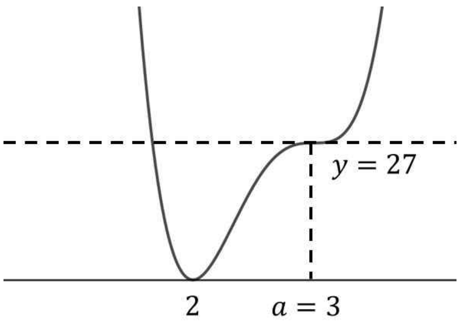


이렇게 되거나



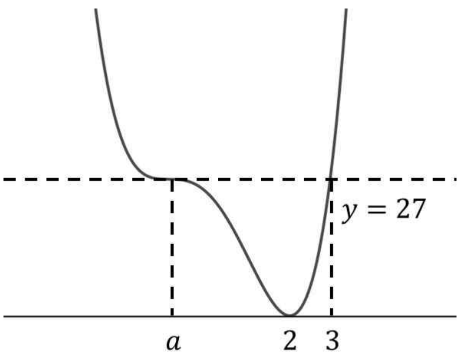
이렇게 됩니다.

그러면 3은요? $x=3$은 어디에 위치하게 되는 거죠? 왼쪽의 그림같은 경우 2보다 3이 크잖아요? 따라서 $a=3$이 될 수밖에 없겠네요.



이렇게 될 거에요.

오른쪽 그림같은 경우도 마찬가지로 $2 < 3$이잖아요. 그러면

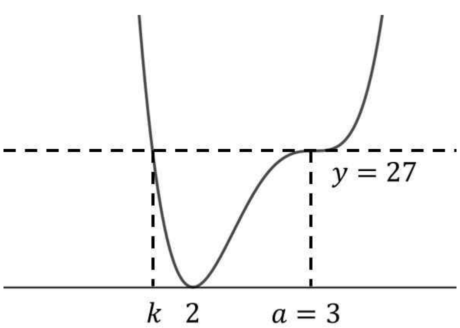


이렇게 되겠네요.

이 중 뭐가 맞는 거죠? 그럼 함수 구해보고 다 값이 맞는지 확인해보면 되겠죠.

3) 함수 구하기 - 사차함수의 비율관계, 차함수

일단



이거부터 해볼게요. 이 그림처럼 $y = 27$과 $y = g(x)$가 만나는 점

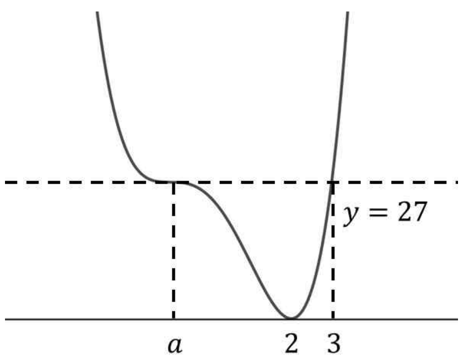
중에서 $x = 3$이 아닌 점의 x좌표를 k라 하면 $y = 27$과 $y = g(x)$은 $x = k$에서 그냥 만나고 $x = 3$에서 접하면서 방향 그대로 지나가죠? 그런데 사차함수의 비율관계가 있잖아요. k와 3의 $1 : 3$내분점은 극소점의

x좌표인 2가 되는 거였죠. 따라서 $\dfrac{3k+3}{1+3}=2$이고 $k=\dfrac{5}{3}$입니다. 차함수에 의하여 $g(x)-27$은 $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$이라는 인수 하나, $(x-3)$이라는 인수 3개를 가지게 되네요.

거기다 $g(x)$는 $f(x)$를 적분한 거였죠? $f(x)$의 최고차항의 계수는 4니까 $f(x)=4x^3+\cdots$가 되구요. 이거 적분하면 $g(x)$의 최고차항의 계수는 1이 되네요. $g(x)-27=\left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)^3$이구요

$g(x)=\left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)^3+27$입니다.

그리고 $g(2)=0$이어야 하잖아요? 그런데 $g(2)=\dfrac{80}{3}$이네요? 이건 조건에 맞지 않는데요? 이제



이거로 가봅시다. 아까와 마찬가지로 하면 돼요. $y=g(x)$와 $y=27$은

$x=a$에서 접하면서 방향 그대로 가구요, $x=3$에서 그냥 만납니다. 따라서 a와 3의 $3:1$내분점은 2가 되구요, $\dfrac{9+a}{3+1}=2$이고 $a=-1$이 나오네요. 차함수에 의하여 $g(x)-27$은 $(x+1)$이라는 인수 3개, $(x-3)$이라는 인수 1개를 가집니다. $g(x)$의 최고차항의 계수는 1이구요. 따라서 $g(x)-27=(x+1)^3(x-3)$이고 $g(x)=(x+1)^3(x-3)+27$입니다. 그리고 $g(2)=0$이네요. 맞네요!

이제 $f(5)$만 구하면 돼요. $g'(x)=f(x)$니까 미분하고 $x=5$를 넣으면 되겠네요. 미분하면 $g'(x)=f(x)=3(x+1)^2(x-3)+(x+1)^3$이 되고 $f(5)=432$입니다.

12. 정답 ③

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

주사위를 세 번 던지고 나온 수가 차례로 $a,\ b,\ c$인데 $f(x)=(a-3)(x^2+2bx+c)$가 있어요. 이때

$g(x)=\begin{cases} 1\ (x>0) \\ 0\ (x\le 0) \end{cases}$가 있는데 $(g\circ f)(x)$가 연속일 확률을 구하랍니다. 일단 구하는 확률은

$\dfrac{(g\circ f)(x)\text{가 연속}}{\text{주사위 세 번}}$ 입니다.

분모부터 구해봅시다. 주사위의 눈은 1부터 6까지 있으니까 경우의 수는 $6^3=216$이네요.
분자를 구해볼게요. 일단 $(g\circ f)(x)$는 $g(x)$의 x자리에 x대신 $f(x)$를 넣은 거잖아요. 넣어봅시다.

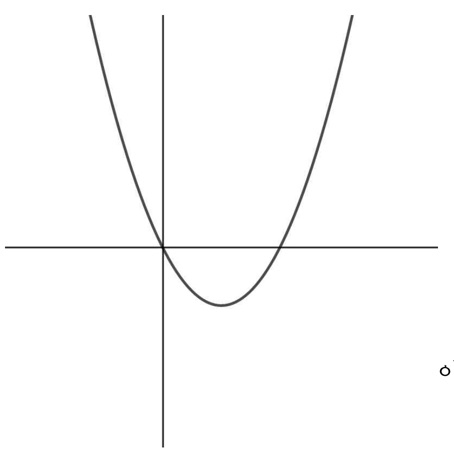
$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 1\ (f(x)>0) \\ 0\ (f(x)\le 0) \end{cases}$입니다.

이게 연속이어야 한다구요? 잘 생각해보세요. 연속이면 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 합니다. 어느 하나라도 변하면 연속이 아니에요. 그런데 지금 $(g\circ f)(x)$는 $f(x)$가 양수냐 음수냐에 따라 함숫값이 바뀌잖아요.

만약 $f(x)$가 x축을 지나가는 곳이 있다면? 그곳에서 $(g\circ f)(x)$의 함숫값이 바뀌겠죠? 그러면 연속이 안 되잖아요.

결국 항상 x축 위에 있거나 항상 x축보다 작거나 같아야 합니다. 작을 때는 x축과 접하는 거까지는 돼요. 범위가 $f(x)\le 0$이어서 등호가 있으니까 함숫값이 바뀌지 않거든요.

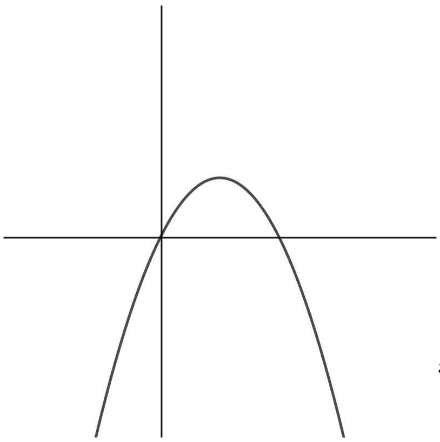
만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라면 $(g\circ f)(x)$가 연속이기 위해서는 $f(x)$는 항상 x축 위에 있어야 합니다. 그래프를 그려보면



이렇게 x축 아래로 내려갈 경우 $(g\circ f)(x)$가 불연속인 점이 생기기

때문이죠.

만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수라면 $(g \circ f)(x)$가 연속이기 위해서 $f(x)$는 항상 x축보다 작거나 같아야 해요. 이것도 마찬가지로 x축 위에 있는 부분이 있도록 그래프를 그려보면



x축 위로 올라갈 경우 $(g \circ f)(x)$가 불연속이 되는 점이 생깁니다.

지금 $f(x)=(a-3)(x^2+2bx+c)$이잖아요? 따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 경우, 즉 $a>3$일 경우에는 $f(x)$는 항상 x축보다 위에 있어야 합니다. 항상 x축보다 위에 있어야 한다는 말은 $x^2+2bx+c$의 판별식이 0보다 작아야 한다는 말이죠. 따라서 $4b^2-4c<0$이고 $b^2<c$이어야 합니다.

지금 해볼까요? $a>3$인 경우는 $a=4$, 5, 6으로 3개입니다. $b^2<c$인 경우는 기준을 잡고 분류를 해봐야겠네요. b를 기준으로 해보면 되겠죠?

b	c	경우의 수
1	$2\sim6$	5
2	$5\sim6$	2
$3\sim6$	불가능	0

따라서 총 7개입니다. a가 3개가 가능하니까 경우의 수는 $3\times7=21$이네요.

어? 그런데 만약 $a=3$이어서 $f(x)=0$이면요? 이러면 $(g \circ f)(x)=g(0)=0$이잖아요? 계속 연속이 되네요! 이 경우에는 b와 c를 뭘 골라도 되겠어요. 경우의 수는 $6^2=36$입니다.

만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수라면, 다시 말해 $a<3$이라면 $f(x)\leq 0$이어야 합니다. $a=1$, 2가 되죠? 경우의 수는 2이구요. $f(x)\leq 0$이어야 하니까 $x^2+2bx+c$의 판별식이 0보다 작거나 같아야 하겠네요. 따라서 $b^2 \leq c$입니다. 아까와 마찬가지로 기준 잡고 분류해봅시다.

b	c	경우의 수
1	$1\sim6$	6
2	$4\sim6$	3
$3\sim6$	불가능	0

이렇게 총 9개가 가능하네요. a가 두 개가 가능하니까 경우의 수는 $2\times9=18$입니다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{21+36+18}{216}=\dfrac{25}{72}$입니다. 답은 ③번이네요.

13. 정답 ②

1) 그림 있으면 그림 보면서, 조건해석

$f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수라고 합니다. 그리고 갑자기 $|x(x-2)(x-3)|$가 그려져 있네요. 뭐에 쓰는 걸까요?

(가)조건에서 $f(x)=0$의 실근이 0, 2, 3'뿐'이라고 하네요. 다시 말해서 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표가 0, 2, 3만 있다는 거잖아요.

2) 인수정리

만약 $y=f(x)$와 x축이 0, 2, 3에서 지나가기만 했다고 해봅시다. 그러니까 $f(x)$는 x, $(x-2)$, $(x-3)$이라는 인수를 각각 딱 하나씩만 가지고 있는 상황이에요. 이거 이외에 다른 실근은 없습니다. 사차함수는 최대 4개까지의 실근을 갖는 것이 가능하죠. 만약 저렇게 3개의 실근만을 딱 한 번만 가진다면, 나머지 하나의 근은 허근이어야 한다는 이야기에요. 그런데 그게 가능한가요?

그러니까 이렇게 되는 거예요. $f(x)$는 x, $(x-2)$, $(x-3)$이라는 실근을 가지니까 인수정리에 의하여 $f(x)=kx(x-2)(x-3)(x-b)$ $(k<0)$라고 쓸 수 있죠. 그렇잖아요? 사차함수니까요. 그러면 자연스럽게 나오는 저 $(x-b)$는 뭐죠? 이건 실근 아닌가요? 그러면 0, 2, 3이외에 또다른 실근이 추가되었어야 해요. 그런데 없다고 했잖아요.

결국 $f(x)$의 x, $(x-2)$, $(x-3)$라는 인수 중 적어도 하나는 2개를 가져야 합니다. 그러니까 $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$이거나 $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$이거나 $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$이 되는 거죠.

케이스가 3개네요?

케이스를 나누기 전에 (나)조건부터 봅시다. $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라고 한답니다. 부정표현은 바꾸자고 했죠? $g(x)$는 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 작거나 같은 값입니다.

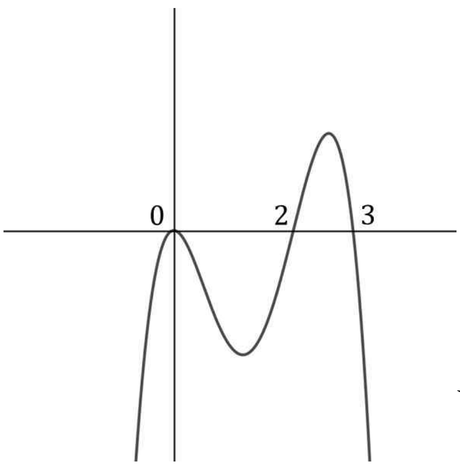
이때 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 하네요. 그리고 이때 $f(1)$의 최댓값을 구하래요.

음... 케이스부터 나눠볼게요.

3) 케이스 분류

3-1) $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$일 때

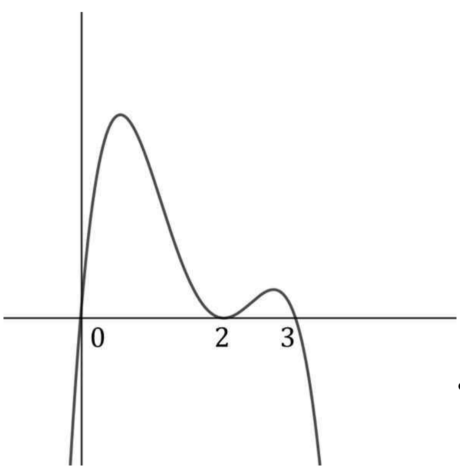
이거 그래프 한 번 그려볼게요. x축과 $x=0$에서 접하고 $x=2$, 3에서 그냥 지나가는 그래프입니다.



그리고 $f(1)=2k$입니다. $f(1)$이 최대가 되려면 k가 가장 커져야겠네요. k는 음수잖아요? 그런데 아래에 3-2)랑 3-3)을 한 번 스을쩍 보고 오세요. 다 $f(1)$이 양수죠? 그런데 이 경우만 음수네요. $f(1)$이 최대가 되는 건 애초부터 불가능한데요?

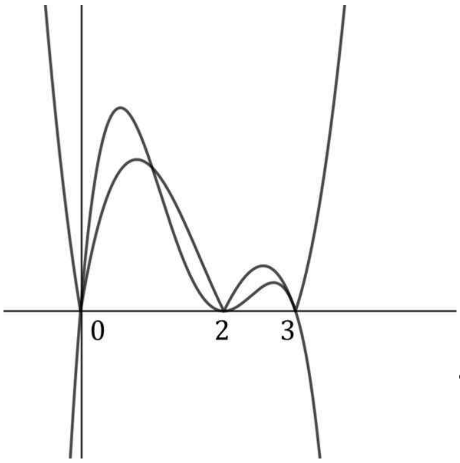
3-2) $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$일 때

x축과 $x=2$에서 접하구요, $x=0$, 3에서 그냥 만납니다.

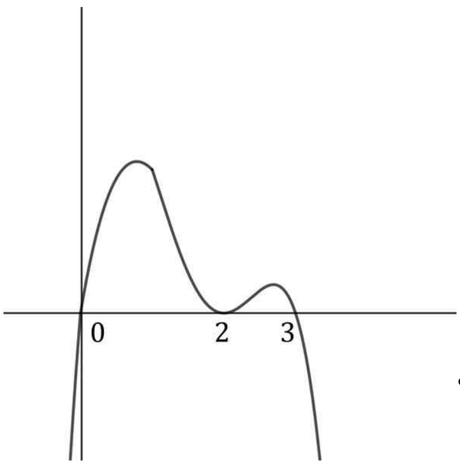


이렇게 됩니다. 그리고 $f(1)=-2k$이니까 k가 가장 작아져야겠네요.

그런데 뭘 어째야 하죠? $g(x)$가 미분가능해야 한다는데.... $g(x)$는 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 작거나 같은 값이라고 했었죠? 그런데 저거 그림 좀 봐바요. $g(x)$의 그래프를 한 번 그려볼게요.



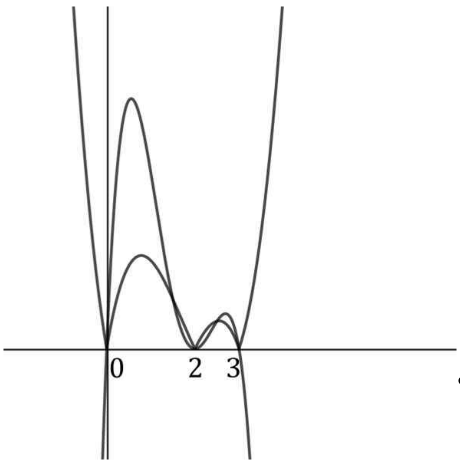
일단 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$를 이렇게 겹치게 그리고 여기서 작거나 같은 부분만 그리면



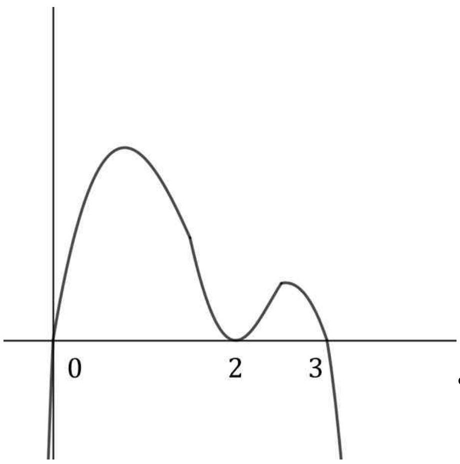
이렇게 됩니다.

어? 그림 잘 보세요. 미분불가능한 점이 두 개나 있는데요? $x=0$에서 갑자기 기울기가 달라지구요, 그리고 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 $0<x<2$에서 만나는 점에서도 기울기가 달라집니다. 매끄럽게 연결이 안 돼요. 이러면 안 되잖아요?

어... 지금 보면 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 그냥 만나기만 하면 그 점에서 미분불가능해지는 걸까요? 그림 하나만 더 그려봅시다.



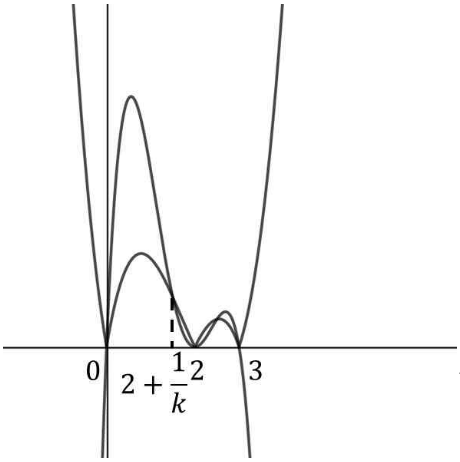
이렇게 그려볼게요. 작거나 같은 부분만 짤라내면



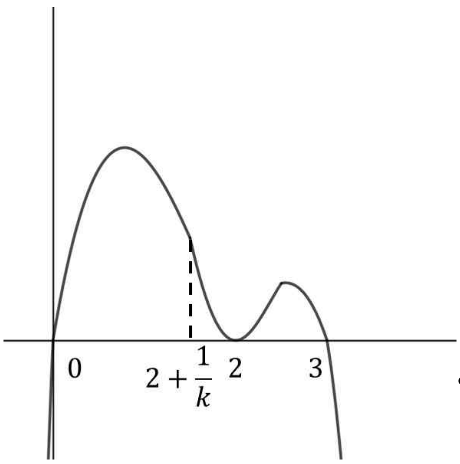
이렇게 됩니다. 이것도 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나는 점에서 미분불가능하네요.

아! 그러면 만나는 점을 잘 살펴봐야겠어요! 지금까지 관찰해봤을 때 만나는 부분에서 뭔가가 발생합니다.
어.. 그런데 $|x(x-2)(x-3)|$는 그 자체로 방정식을 세우거나 할 수는 없잖아요? 이거는 절댓값을 풀고 범위 나눠서 해결해야 할 것 같은데요?

$|x(x-2)(x-3)|$의 절댓값을 풀면 $|x(x-2)(x-3)|=\begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0<x<2,\ x>3) \\ -x(x-2)(x-3) & (x \geq 0,\ 2 \leq x \leq 3) \end{cases}$이 됩니다.
그러면 $0<x<2,\ x>3$에서는 $kx(x-2)^2(x-3)=x(x-2)(x-3)$을 계산하면 됩니다. 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-2-\dfrac{1}{k}\right)=0$이네요. 오! 일단 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$는 $x=0,\ 2,\ 3$에서 만나기는 하는 군요. 어? 그런데 $x=2+\dfrac{1}{k}$라는 실근도 있네요? 그러니까 $x=2+\dfrac{1}{k}$라는 점에서 만난다는 말이잖아요? 그런데 방금도 봤듯이 만나기만 하면 미분불가능이 되었어요. 만약 $x=2+\dfrac{1}{k}$라는 점이 $0<x<2$에 있다고 생각해보세요.



만나는 이 점이 $x=2+\frac{1}{k}$가 되구요. $g(x)$를 그리면



이렇게 됩니다. 미분불가능하잖아요!!

(그러니까 식으로 해보면 $g(x)=\begin{cases} x(x-2)(x-3) & \left(0<x<2+\frac{1}{k}\right) \\ kx(x-2)^2(x-3) & \left(x \geq 2+\frac{1}{k}\right) \end{cases}$이 되는 거죠. $x=2+\frac{1}{k}$에서

미분가능한지 보기 위해서 이거 각각 미분하고 $x=2+\frac{1}{k}$을 넣으면 $x<2+\frac{1}{k}$에서

$g'(k-)=\dfrac{(1-k)+(2k+1)+(2k+1)(1-k)}{k^2}$이구요. $x>2+\frac{1}{k}$에서

$g'(k+)=\dfrac{(1-k)+(2k+1)+2(2k+1)(1-k)}{k^2}$입니다. 지금 $\dfrac{(2k+1)(1-k)}{k^2}$만큼 차이가 나잖아요? 차이가

없어야 미분가능하죠. 따라서 $k=-\frac{1}{2}$가 아니면 미분불가능해요.

물론 방금 식으로 한 부분은 $x=2+\frac{1}{k}$가 $0<x<2$에 있을 때를 전제로 한 거예요. 그러면 자연스럽게

$0<x<2+\frac{1}{k}$에서 $f(x)\geq x(x-2)(x-3)$가 되거든요.)

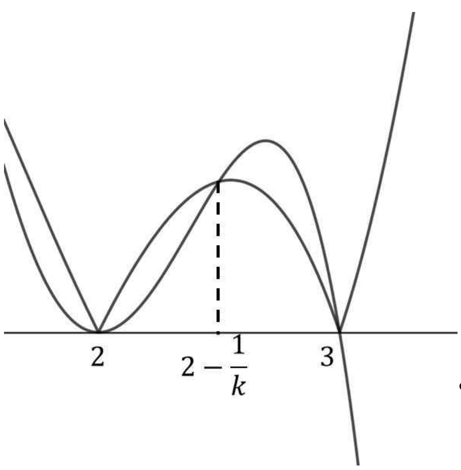
따라서 $x=2+\frac{1}{k}$라는 실근은 $k=-\frac{1}{2}$이거나 $0<x<2$밖으로 벗어나야 합니다. 범위 밖으로 벗어나면

상관이 없어요. 어차피 $0<x<2$, $x>3$에서만 $x(x-2)(x-3)$이거든요. 아까 $k<0$이라고 했으니까 $2+\dfrac{1}{k}<2$이죠. 그러면 $0<x<2$의 범위 밖은 $x\le 0$이 되겠네요. 따라서 $2+\dfrac{1}{k}\le 0$이고 $k\ge -\dfrac{1}{2}$입니다. 아까 $k=-\dfrac{1}{2}$도 포함되어 있네요.

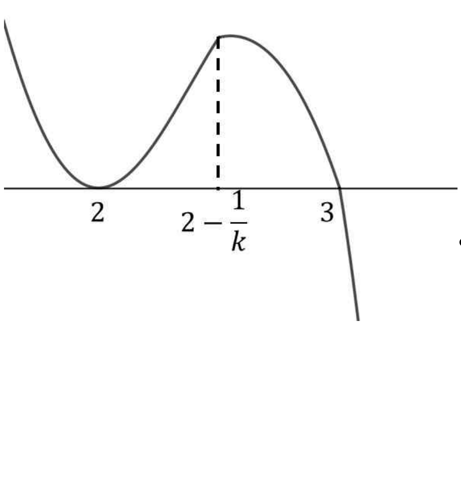
이번엔 $x\ge 0$, $2\le x\le 3$를 봅시다. 이 범위 안에서 $|x(x-2)(x-3)|=-x(x-2)(x-3)$입니다. 그리고 이거랑 $f(x)$랑 만나는지 확인해야겠죠. $kx(x-2)^2(x-3)=-x(x-2)(x-3)$이고 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-2+\dfrac{1}{k}\right)=0$이 됩니다. $x=0$, 2, 3에서 만나는데, $x=2-\dfrac{1}{k}$은 뭐죠? 이거도 아까랑 같은 상황 아닐까요? $x=2-\dfrac{1}{k}$에서 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나긴 한다는 거잖아요.

일단 $k<0$이니까 $2-\dfrac{1}{k}>2$입니다. 만나는 점은 $x>2$에 있어요. 그러면 $2\le x\le 3$부분을 집중해서 봐야 하겠는데요? 만나는 점이 이 범위 안에 있을지도 모르니까요.

만약 $x=2-\dfrac{1}{k}$라는 점이 $2\le x\le 3$의 범위 안에 있다고 생각해보세요. (여기 부분만 볼게요.)



이렇게 되고 작거나 같은 부분만 짤라서 $g(x)$를 그려보면



이렇게 됩니다. 여기서 미분불가능하잖아요!

(마찬가지로 식으로 해보면 $g(x)=\begin{cases} kx(x-2)^2(x-3) & \left(2 \le x < 2-\dfrac{1}{k}\right) \\ -x(x-2)(x-3) & \left(2-\dfrac{1}{k} \le x \le 3\right) \end{cases}$이 되는 거죠. 각각 미분하고

$x=2-\dfrac{1}{k}$을 넣으면 $x<2-\dfrac{1}{k}$에서 $g'(k-)=\dfrac{-(k+1)+(2k-1)+2(2k-1)(k+1)}{k^2}$이구요, $x>2-\dfrac{1}{k}$에서

$g'(k+)=\dfrac{-(k+1)+(2k-1)+(2k-1)(k+1)}{k^2}$입니다. 지금 $\dfrac{(2k-1)(k+1)}{k^2}$만큼 차이가 나는데 이게 없어야

미분가능하죠. 따라서 $k=-1$가 아니면 미분불가능해요.

지금도 식으로 한 부분은 $x=2-\dfrac{1}{k}$가 $2 \le x \le 3$에 있을 때를 전제로 한 거예요. 자연스럽게

$2-\dfrac{1}{k}< x \le 3$에서 $f(x) \ge -x(x-2)(x-3)$가 되거든요.)

따라서 $x=2-\dfrac{1}{k}$라는 실근은 $k=-1$이거나 $2<x<3$의 범위 밖으로 나가야 합니다. 범위 밖에서 만나는 건

상관없어요. $2-\dfrac{1}{k} \ge 3$이고 $k \ge -1$입니다. 여기에도 $k=-1$가 포함되어 있네요? 아까 $k \ge -\dfrac{1}{2}$의 범위와

합치면 $k \ge -\dfrac{1}{2}$가 되네요.

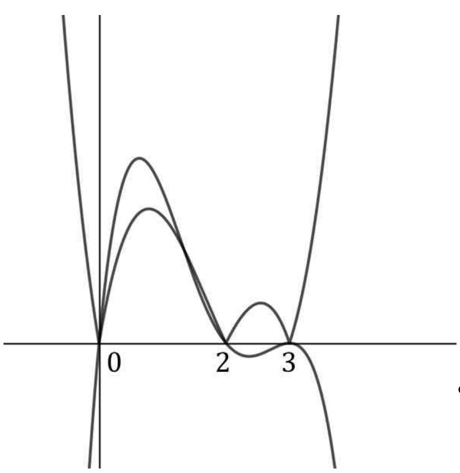
아무튼 $k \ge -\dfrac{1}{2}$이니까 $f(1)=-2k \le 1$이고 $f(1)$의 최댓값은 1입니다. 선지에 없는 걸 보니까 이것도 아닌 것

같은데요?

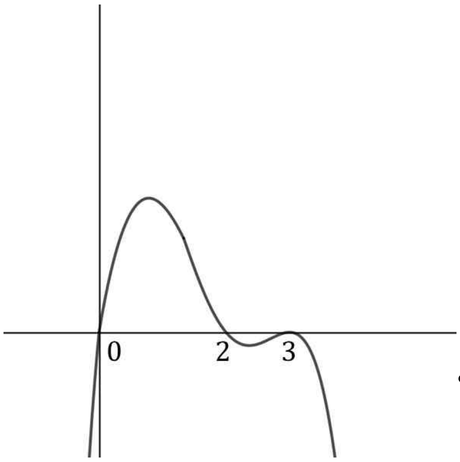
3-3) $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$일 때

$f(x)$는 x축과 $x=0,\ 2$에서 그냥 만나고 $x=3$에서 접하는 그래프입니다. $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$를 동시에

그리면



이렇게 되구요, 작거나 같은 부분만 짤라서 $g(x)$를 그리면



이렇게 됩니다. 이 그래프 역시 만나는 점에서 미분불가능해지군요.

근데 이 그래프는 좀 편할 거 같아요. $x>2$에서 명백히 $f(x)$가 $|x(x-2)(x-3)|$보다 작아서 $g(x)=f(x)$이거든요. 그러니까 우리는 $0<x<2$에서만 확인하면 됩니다. 할 게 하나 줄었네요. 아까랑 똑같은 방법으로 가봅시다.

$0<x<2$에서 $|x(x-2)(x-3)|=x(x-2)(x-3)$이죠. 따라서 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나는 점을 찾기 위해서 $kx(x-2)(x-3)^2=x(x-2)(x-3)$라 하고 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-3-\frac{1}{k}\right)=0$입니다.

$x=3+\frac{1}{k}$만 확인하면 되겠군요.

이번엔 식도 생략하고 바로 갈게요. 지금 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 $x=3+\frac{1}{k}$라는 점에서 만나잖아요.

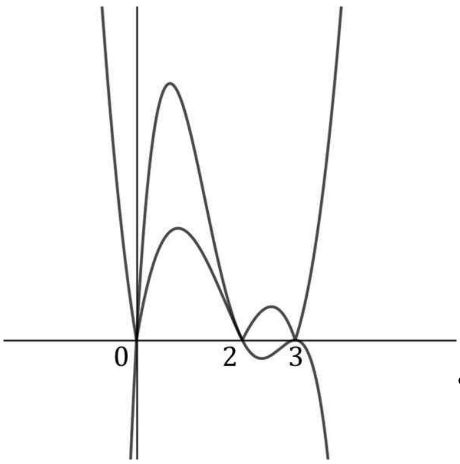
그런데 만나면 미분불가능해집니다. 따라서 $x=3+\frac{1}{k}$는 $0<x<2$의 범위 밖으로 벗어나야 해요.

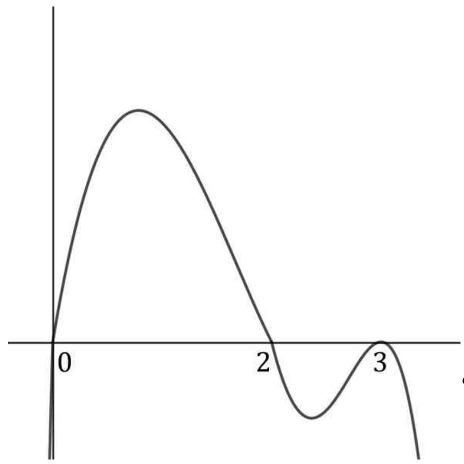
$k<0$이니까 $3+\frac{1}{k}<3$입니다. 따라서 $3+\frac{1}{k}\geq 0$이거나 $3+\frac{1}{k}\geq 2$이고 $k\geq-\frac{1}{3}$이거나 $k\leq-1$입니다.

어라? 왜 범위가 두 개가 나오죠?

이 경우 문제가 이거에요. 범위가 두 개가 나와요. 그럼 뭘 어쩌라는 거죠?

다시 생각해봅시다. 지금 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나는 점인 $x=3+\frac{1}{k}$를 $0<x<2$의 범위 밖으로 보내버렸어요. 그러면 지금 $0<x<2$에서 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$는 만나는 점이 없습니다. 그 말은 계속 $f(x)$가 $|x(x-2)(x-3)|$보다 위에 있거나, 계속 아래에 있다는 이야기에요. 만나는 점이 없으니까요. 근데 $f(x)$가 위에 있다고 해보면



이렇게 되고 $g(x)$는 

이렇게 됩니다.

지금 $x=0$과 $x=2$에서 미분불가능하잖아요. 양쪽의 미분계수가 다르기 때문이죠. 이런 일이 왜 발생하는 걸까요?

그림을 잘 보세요. $x=0$에서 미분계수가 $f(x)$가 더 크고 $x=2$에서 미분계수가 $f(x)$가 더 작죠? 더 가파르잖아요. 이 상황에서 각각의 미분계수를 구해봅시다. $x=0$에서 $|x(x-2)(x-3)|$의 우미분계수는 $x(x-2)(x-3)$의 미분계수인 6입니다. 그리고 $f(x)$의 미분계수는 $-18k$가 나오죠. 그리고 지금과 같은 상황에서는 $x=0$에서 $f(x)$의 미분계수가 더 크니까 $-18k>6$이고 $k<-\dfrac{1}{3}$입니다.

그리고 $x=2$에서 $|x(x-2)(x-3)|$의 좌미분계수는 $x(x-2)(x-3)$의 미분계수인 -2입니다. 그리고 $x=2$에서 $f(x)$의 미분계수는 $2k$이구요. $f(x)$가 더 작으니까 $2k<-2$이고 $k<-1$입니다. $k<-\dfrac{1}{3}$와 종합해보면 $k<-1$이네요. 어? 이거 어디서 본 적 있지 않나요? 아까 나왔던 두 개의 범위 중 하나잖아요! 아까 $k\geq-\dfrac{1}{3}$와 $k\leq-1$이렇게 2개가 나왔었잖아요. 그 중 $k<-1$이면 방금과 같이 미분불가능한 상황이 발생합니다.

그러면 $k=-1$이면요? 아까는 이것도 등호에 포함되어 있었잖아요. $x=0$에서 미분계수를 비교해보세요. 여전히 $f(x)$의 미분계수가 더 크죠? 다시 말해서 $0<x<2$에서 $f(x)$가 위에 있어서 $g(x)$를 구할 때 $x<0$에서 더 작은 $g(x)=f(x)$였던 게 $0<x<2$에서는 $g(x)=x(x-2)(x-3)$으로 바뀐다는 이야기에요. $g(x)$는 더 작은 걸 선택하는 함수잖아요. 그 과정에서 $x=0$에서의 미분계수가 서로 다르니 미분불가능이 된 거구요.

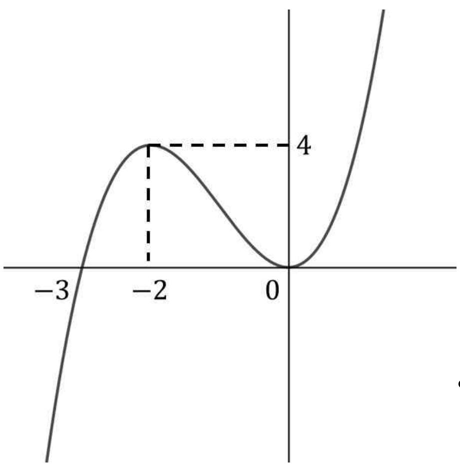
따라서 $k=-1$이어도 되지 않고 $k\geq-\dfrac{1}{3}$입니다. $f(1)=-4k\leq\dfrac{4}{3}$이니까 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이네요. 답은

②번입니다.

14. 정답 9

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정수 보이면 숫자 넣을 준비

$f(x)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$가 있어요. x축과 $x=0$에서 접하고 $x=-3$에서 그냥 만나는 그래프이죠? 삼차함수의 비율 관계를 사용하면 변곡점의 x좌표는 $x=-1$이고 극대점의 x좌표는 $x=-2$입니다. 극댓값은 4네요.



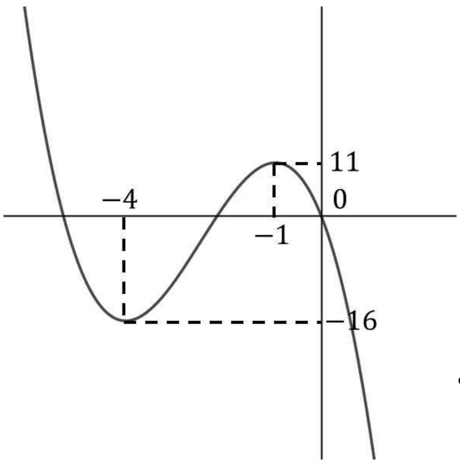
이렇게 됩니다.

a가 정수라고 하네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

2) 조건해석

(가)조건에서 $(-4,\ a)$를 지나고 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개가 있다고 합니다. 접점의 좌표를 일단 $(t,\ f(t))$라 하면 서로 다른 t가 3개가 있어야 하죠? 그래야 모두 다른 접점에서 접하게 될 테니까요. 접선은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)=\left(3t^2+6t\right)x-2t^3-3t^2$입니다. 이 직선이 $(-4,\ a)$를 지나야 하니까 $-2t^3-15t^2-24t=a$입니다. 결국 $y=-2t^3-15t^2-24t$와 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하는 거예요.

일단 접할 때를 확인해야겠죠? 미분하면 $-6t^2-30t-24=-6\left(t^2+5t+4\right)=-6(t+1)(t+4)$이니까 $t=-4$에서 극소, $t=-1$에서 극대입니다. 극솟값은 -16, 극댓값은 11입니다.

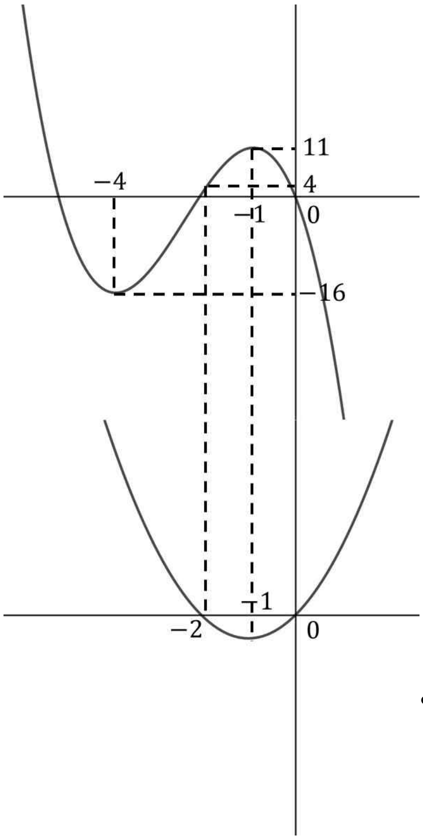


이렇게 되네요. 이 함수와 $y=a$가 세 개의 점에서 만나려면 a가 -16과 11사이에 있어야겠죠? 따라서 $-16<a<11$입니다.

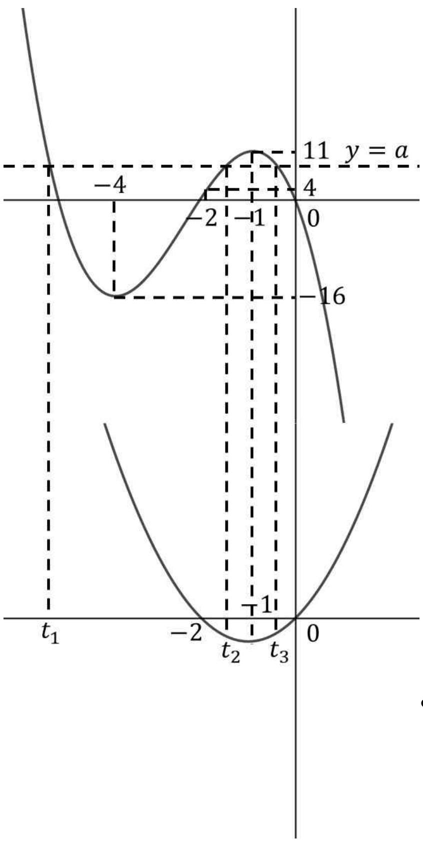
(나)조건에서 세 접선의 기울기의 곱이 음수라고 합니다. 음...
일단 접점의 좌표인 t는 $y=-2t^3-15t^2-24t$와 $y=a$의 교점의 t좌표에요. 그리고 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$이구요. $y=-2t^3-15t^2-24t$와 $y=a$의 교점을 t_1, t_2, t_3이라 하면 $f'(t_1)\times f'(t_2)\times f'(t_3)<0$이어야 하죠?

그럼 천천히 확인해 보자구요. $f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$는 $t=0$, -2에서 t축과 만나고 축이 $t=-1$인 함수입니다. 여기서 $y=-2t^3-15t^2-24t$에 $y=a$를 긋고 만나는 점을 그대로 $f'(t)$에 내려서 부호를 확인해보면 되겠죠. 일단 $f'(t)>0$이 되는 t는 $t>0$, $t<-2$이구요, $f'(t)<0$가 되는 t는 $-2<t<0$입니다.

그러면 $y=-2t^3-15t^2-24t$에서 $t=-2$의 값도 확인해봐야 하지 않을까요? 그래야 $y=a$와의 실근이 $f'(t)$의 부호가 바뀌는 지점인 $t=-2$보다 큰지 작은지를 확인할 수 있으니까요. 함숫값은 4입니다.



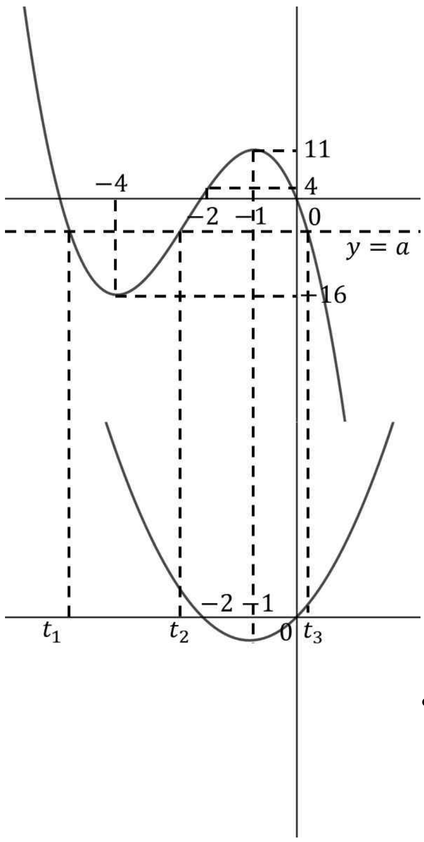
이렇게 됩니다. 만약 $y=a$가 4보다 크다면



이렇게 됩니다. $f'(t_1)>0$, $f'(t_2)<0$, $f'(t_3)<0$이니까 다 곱하면 양수가

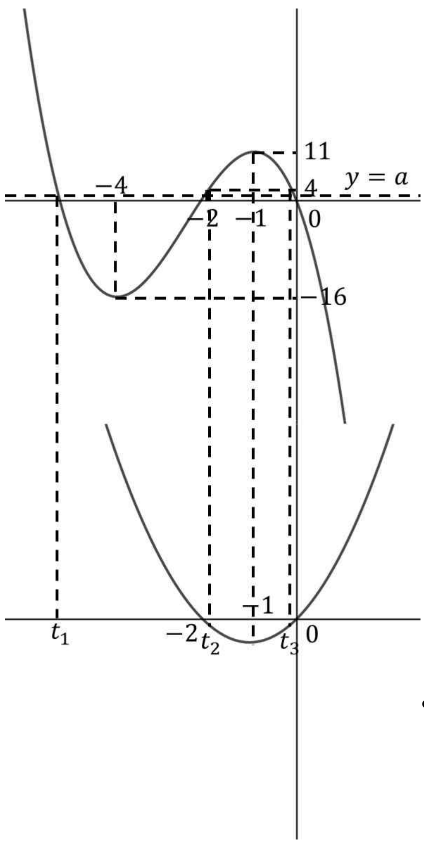
나오죠? 이 경우는 안 됩니다.

$a=4$가 되면 그냥 $f'(t_2)=0$이니까 곱해서 음수가 될 리가 없죠.



이렇게 $a < 0$이 되면요? 이러면 $f'(t_1) > 0$, $f'(t_2) > 0$, $f'(t_3) > 0$이니까

곱하면 양수가 됩니다. 따라서 $0 < a < 4$이어야 하네요. 이러면



이렇게 $f'(t_1) > 0$, $f'(t_2) > 0$, $f'(t_3) < 0$이 되니까 곱하면 음수가 되겠죠?

3) 정수 보이면 숫자 넣기

a가 정수였잖아요? $0 < a < 4$에서 정수는 $a = 1,\ 2,\ 3$입니다. 최댓값은 $M = 3$이네요. $M^2 = 9$입니다.

15. 정답 8

1) 문제해석, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 2) \\ -\displaystyle\int_4^x |f'(t-2)|\,dt & (x \geq 2) \end{cases}$라고 한답니다. 이게 무슨 함수일까요? 일단 이거부터 해석해봅시다.

$x < 2$에서는 $g(x) = f(x)$입니다. 방금 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수라고 했었죠? 그걸 $x < 2$ 부분만 짜른 함수네요.

그리고 $x \geq 2$에서는 $g(x) = -\displaystyle\int_4^x |f'(t-2)|\,dt$랍니다. 이건 뭔.... 뭐죠?

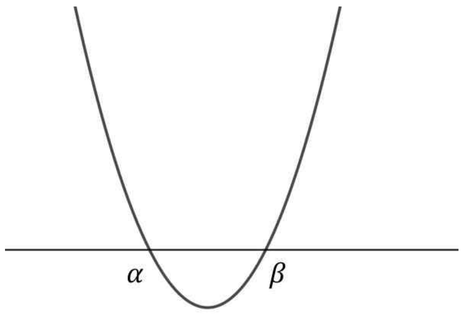
항상 일관된 원칙을 적용합시다. 정적분의 위끝에 변수가 있죠? 일단 먼저 해야 할 일은 위끝과 아래끝이 같아지는 $x = 4$를 넣는 거죠. 넣으면 $g(4) = 0$이 됩니다. 그리고 미분해야죠? 미분하면 $g'(x) = |f'(x-2)|$입니다.

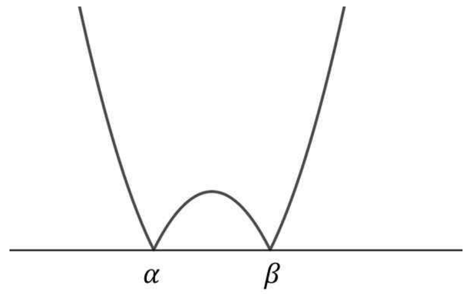
2) 절댓값 함수

$g'(x) = |f'(x-2)|$라는데 이거 좀 봅시다. 일단 $f'(x)$는 $f(x)$의 도함수입니다. $f(x)$가 삼차함수였으니 $f'(x)$는 이차함수겠죠.

그런데 저 식에는 x 대신 $x-2$가 들어가 있어요. 이건 평행이동을 하라는 이야기죠? 그러니까 $f'(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, 그러니까 오른쪽으로 2만큼 움직이면 됩니다.

그 후에는 절댓값을 씌운 거죠. 이거 대충 좀 그려볼게요. 만약 $f'(x-2)$의 그래프가



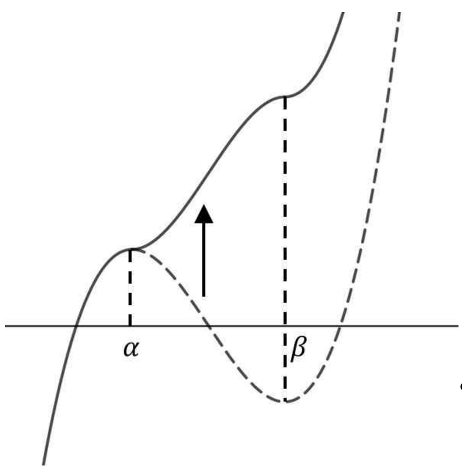


이러면 절댓값을 씌웠을 때

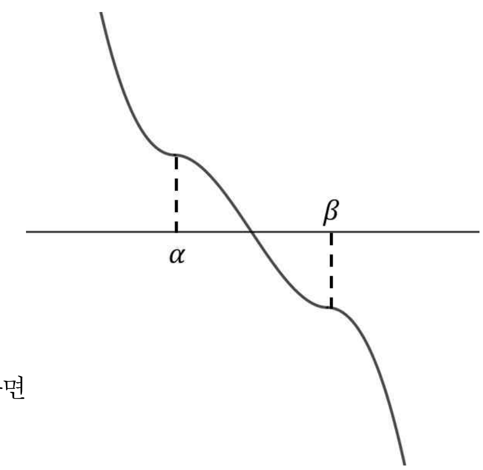
이렇게 됩니다.

그런데 우리는 이걸 적분한 그래프를 그려야 하잖아요? 그래야 $g(x)$의 그래프를 알 수 있을 테니까요. 적분해봅시다. 일단 $x < \alpha$에서는 $f'(x-2) > 0$입니다. 그러다가 $x = \alpha$에서 $f'(x-2) = 0$이 되죠. 그런데 $x > \alpha$에서 다시 $f'(x-2) > 0$가 되네요? 부호의 변화가 없어요. 그러면 극점을 갖지 않는다는 거네요. $x = \beta$에서도 마찬가지죠. 이러면 x^3과 같이 접선의 기울기가 0이 되지만 방향은 바뀌지 않는 점이 두 개가 있게 됩니다.

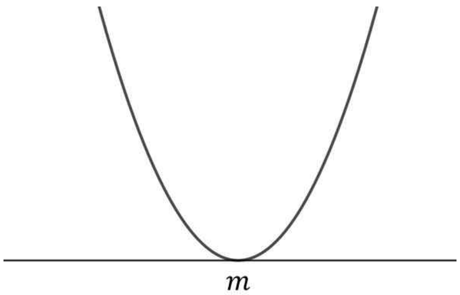
$x < \alpha$에서는 $f'(x-2)$를 적분한 그래프와 $|f'(x-2)|$을 적분한 그래프의 모양이 같습니다. 그런데 $\alpha \leq x \leq \beta$에서는 달라지죠. $f'(x-2)$는 음수가 되니까 적분하면 감소하는 그래프가 되지만 $|f'(x-2)|$는 양수라서 증가하는 그래프가 되거든요. 그런데 모양은 정확히 반대가 되어야 합니다. 같은 식인데 부호만 다른 거잖아요?

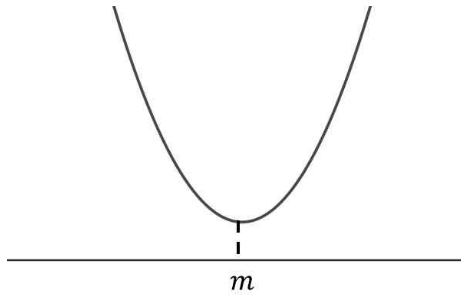


이렇게 말이죠. (−)를 곱해주면



이렇게 되네요. (실선이 $|f'(x-2)|$를 적분한 그래프, 점선이 $f'(x-2)$를 적분한 그래프입니다.) 이런 함수를 $x \geq 2$ 부분에서 짜른 함수가 $g(x)$가 되는 거네요.

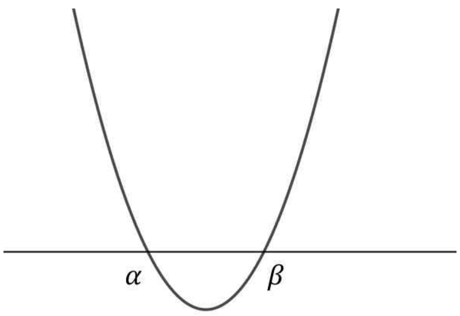


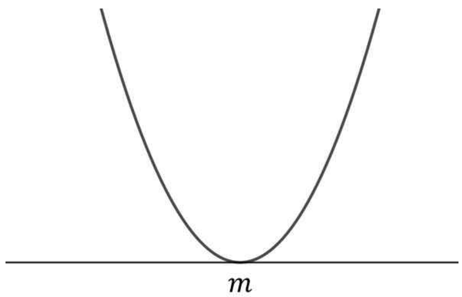


이렇게 되거나 이렇게 되면

그냥 익숙한 삼차함수 모양이 나옵니다.

이때 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하답니다. 어...? 방금 $g(4)=0$라고 하지 않았었나요? x축과 만나는데 미분가능하려면 $g'(4)=0$이어야죠. 그래야 매끄럽게 올라가잖아요. 이게 가능하려면

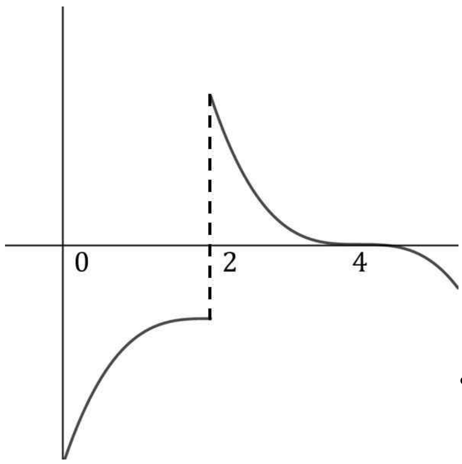




이거 아니면 이거여야

하겠네요.

그런데 $x=m$에서 접하는 그래프는 가능하지 않아요. 일단 $g'(x)=|f'(x-2)|$이니까 $g'(4)=f'(2)=0$인데 저거 그래프를 그려보면



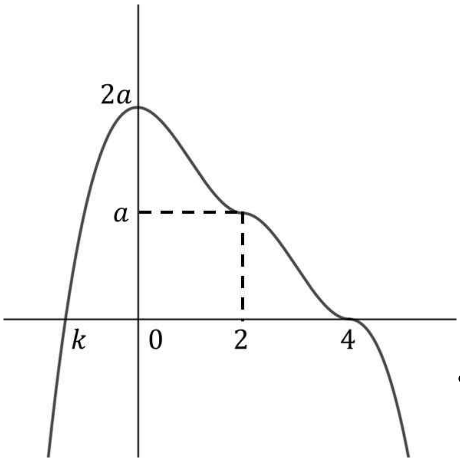
이렇게 됩니다. 접어 올린다고 하더라도 경계가 되는 $x=2$에서 양쪽의 접선의 기울기는 같거나 부호가 반대여야 합니다. 접어 올린다는 건 $(-)$를 곱해서 부호를 반대로 바꿔버린다는 거니까 접선의 기울기의 부호 역시 반대가 되거든요. 지금은 좌미분계수는 0인데 우미분계수는 음수죠?

그런데 $x<2$에서 $g(x)=f(x)$인데 $f'(2)=0$이잖아요. 0과 같은 건 0밖에 없죠. 우미분계수가 0인 상황에서 $|g(x)|$가 미분가능하기 위해서는 좌미분계수도 0이어야 합니다. $g'(2)=f'(2)=0$이어야 하겠네요.

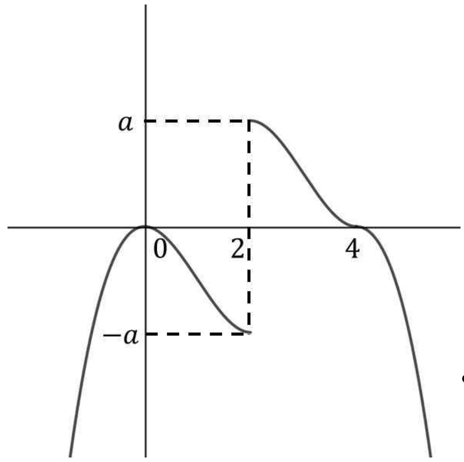
그런데 또 $x\geq 2$에서 $g'(x)=|f'(x-2)|$이잖아요? 그러면 $g'(2)=f'(0)=0$이어야 하겠네요. 연쇄적으로 조건이 나오네요. $f(x)$의 개형이 결정되었어요!

제가 아까 "$\alpha\leq x\leq\beta$에서는 달라지죠. $f'(x-2)$는 음수가 되니까 적분하면 감소하는 그래프가 되지만 $|f'(x-2)|$는 양수라서 증가하는 그래프가 되거든요. 그런데 모양은 정확히 반대가 되어야 합니다"라고 말했었던 거 기억나요? 제가 그림까지 그렸었잖아요. 지금 $f'(0)=f'(2)=0$이니까 $f'(x-2)=0$의 두 실근은 $x=2$, $x=4$겠네요. 따라서 $\alpha=2$, $\beta=4$입니다.

다시 말하면 $2\leq x\leq 4$에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 2만큼 오른쪽으로 평행이동한 후에 $(-)$를 곱해서 반대로 뒤집어버린 그래프를 또다시 $(-)$를 곱해서 원래대로 바꾼 그래프라는 거예요. 사실상 평행이동한 거죠.



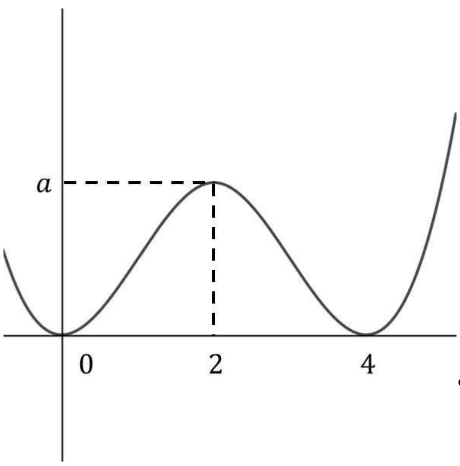
이렇게 되거나



이렇게 되어야

한다는 거죠.

하지만 왼쪽의 그림은 접어 올렸을 때 $x=k$에서 미분불가능합니다. 오른쪽의 그림은



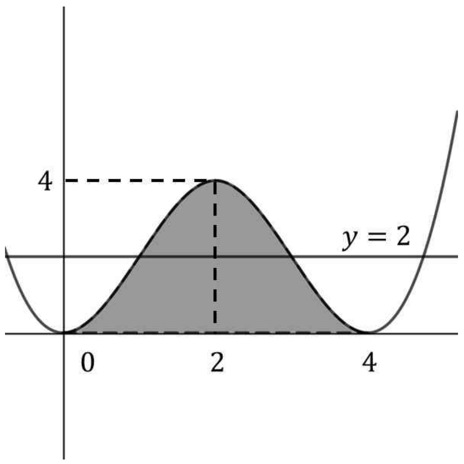
이렇게 되어서 미분가능하죠.

4) 함수 구하기 - 인수정리

함수 한 번 구해봅시다. $f'(0)=f'(2)=0$인데 $f(0)=0$이네요. $f(x)$와 x축이 만나는 점 중에서 $x=0$이 아닌 점의 x좌표를 n이라고 해볼게요. 그러면 $f(x)$는 x축과 $x=0$에서 접하고 $x=n$에서 만나니까 $f(x)=x^2(x-n)$이라 할 수 있죠? 삼차함수의 비율관계를 이용하면 $x=0$과 $x=n$의 $2:1$내분점이 $x=2$가 되니까 $\dfrac{2n}{3}=2$가 되고 $n=3$이 되네요. $f(x)=x^2(x-3)$입니다.

5) 정적분 관찰

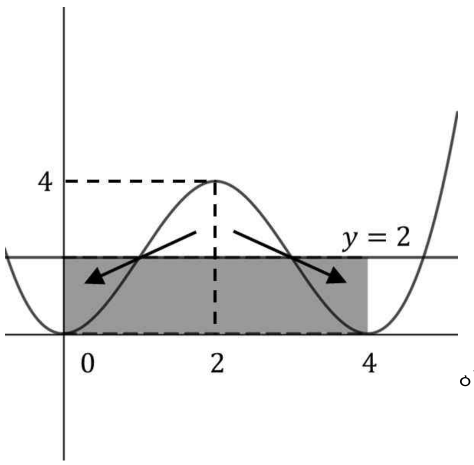
그럼 이제 $\displaystyle\int_0^4 |g(x)|dx$를 구해볼까요? 식이 주어져 있으니까 식 구해서 정적분해도 되지만 지금 평행이동한 그래프가 있잖아요. 이러면 정적분이 편해질 수가 있어요. 그러니까 편하게 할 수 있는지 좀 봐봅시다.



구하는 건 이 부분이에요.

아까도 말했듯이 $g(x)$에서 $0<x<2$ 부분과 $2<x<4$ 부분은 평행이동한 관계라고 했었죠? 그런데 방금 절댓값으로 $0<x<2$부분을 올렸으니까 $|g(x)|$에서 $0<x<2$ 부분과 $2<x<4$ 부분은 $x=2$ 축대칭입니다.

모든 삼차함수는 점에 대하여 대칭이죠. $f(x)$의 변곡점은 두 극점의 중점인 $(1,\ -2)$입니다. 그런데 지금은 접어 올렸으니까 $(1,\ 2)$대칭이겠네요. 따라서

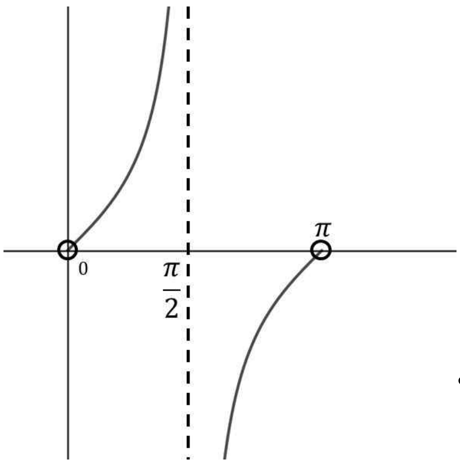


이렇게 바꿀 수 있습니다. 그냥 직사각형의 넓이 구하는 것이 되어버렸죠? 높이 2에 밑변 4로 넓이는 8이네요. 답은 8입니다!

16. 정답 2

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $f(x)$이거부터 그려볼까요?



이렇게 그릴 수 있겠죠? 계속 갑시다.

2) 조건해석, 함수극한은 위아래 식 차수, 계수 비교

(가)조건을 해석해봅시다. 절댓값만 없었다면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수라는 말이네요. 그런데 절댓값이 있잖아요? 그러면 결국 $g(x)$는 이차함수이고 최고차항의 계수는 1 아니면 -1이라는 말이 되겠어요.

(나)조건으로 가볼까요? $\lim_{x \to \alpha -} g(f(x)) = \infty$ 이게 뭘까요? α가 $\frac{\pi}{3}$이런 거였으면 $f(x)$의 값이 정해지고 그에 따라 $g(x)$의 값도 정해져요. 그러니까 극한값이 ∞이 아닌 어떤 상수로 표현이 된다는 의미에요. 그런데 극한값이 ∞이 되어버렸네요.

그러면 α가 어떤 수여야 할까요? 그런데 저 $f(x)$의 그래프에서 눈에 띄는 수가 하나 있죠. $x = \frac{\pi}{2}$이거 말이에요. α가 $\frac{\pi}{2}$이라면 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty$이 돼요. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x)$는 $x = \frac{\pi}{2}$보다 작은 곳에서의 $f(x)$의 함숫값인데 저기 보면 무한대로 발산하잖아요. 그 무한대가 $g(x)$의 x값으로 들어간다고 생각해보세요. $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1또는 1인 2차함수이니까 ∞로 발산하거나 $-\infty$로 발산하겠죠? 다시 말하면 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty$이니까 이 ∞를 $g(x)$의 함숫값으로 넣으면 $g(\infty) = \infty$가 될 거라는 거죠. (물론 저런 표현은 없지만 합성함수에서 극한을 보내는 것이 이해하기 어려운 분들을 위해 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} g(f(x)) = \lim_{x \to \infty} g(x)$를 저렇게 표현한 거예요.)

그런데 만약 $g(x)$의 최고차항의 계수가 -1이라면 $\lim_{x \to \alpha -} g(f(x))$은 $-\infty$로 발산하게 될 거에요. 그런데 ∞로 발산한다고 나와 있네요. 따라서 $g(x)$의 최고차항의 계수는 1입니다.

3) 문제해석 - 합성함수는 치환

이제 (다)조건으로 가봅시다. $g(x)$에 어떤 x값을 집어 넣어야 $g(x)$의 함숫값을 $f(x)$에 집어넣어서 0을 만들 수 있을까요? 일단 $g(x)=k$라고 해볼까요? 그러면 $f(k)=0$이 되네요. 이걸 만족하는 k는 $f(x)$의 그래프에 0밖에 없네요. 이제는 $g(x)=0$이 되는 x값을 찾아야 되겠네요. 그래야 $g(x)=0$이 되고 그 0을 $f(x)$에 집어넣어서 $f(0)=0$을 만들죠. 그런데 그 x값이 0과 $2\alpha=\pi$라네요. 그러면 끝났네요.

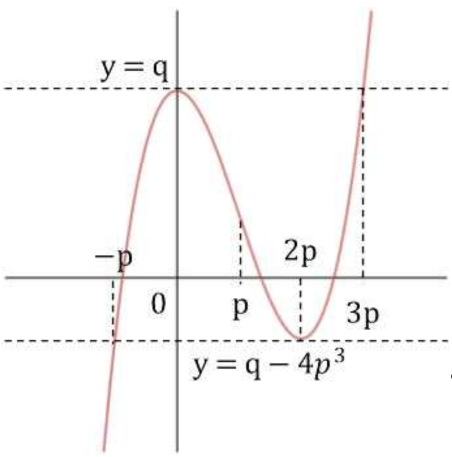
4) 함수 구하기 - 인수정리

$g(x)=0$의 두 서로 다른 실근이 0과 π이니까 인수정리에 의해 $g(x)$는 x와 $(x-\pi)$라는 인수를 적어도 하나 갖는데 $g(x)$는 2차함수이니까 $g(x)=x(x-\pi)$라고 할 수 있겠네요. 마지막 $g(4\alpha)$를 구해봅시다. $2\alpha=\pi$이니까 $g(4\alpha)=g(2\pi)$이고 $g(x)$에 $x=2\pi$를 넣으면 $2\pi^2$가 되겠네요. $a=2$입니다.

17. 정답 14

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 삼차함수의 비율관계

$f(x)=x^3-3px^2+q$가 있네요. 관찰부터 해봅시다. 인수분해는 안 되는 것 같구요, 미분하면 $f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$이니까 $x=0$에서 극대, $x=2p$에서 극소입니다. 극댓값은 q이고 극솟값은 $q-4p^3$이네요. 변곡점의 x좌표는 $x=p$입니다. 대충 그림 그려보면



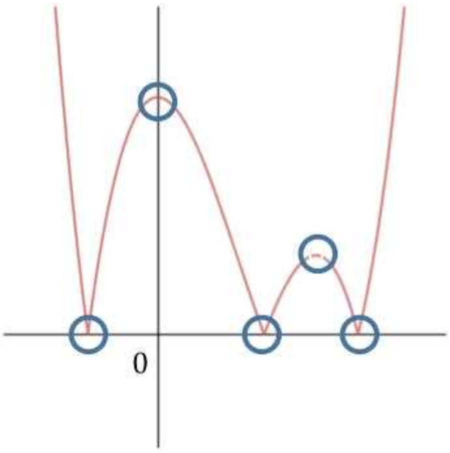
이렇게 됩니다. $x=3p$랑 $x=-p$는 왜 나왔는지 설명 안 해도 알죠?

접선과 함수가 만나는 접점과 교점의 x좌표의 $1:2$내분점은 변곡점의 x좌표라는 거 이용해서 구한 거예요.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건해석, 절댓값 함수

그리고는 p, q가 25이하의 자연수라고 합니다. 그러면 숫자 넣을 준비를 하고 있어야겠죠?

(가)조건에서 $|f(x)|$의 극점이 5개라고 합니다. 이거는 절댓값 씌워서 접어 올려봐야겠는데요? 지금 저 그림부터 접어 올려봅시다.



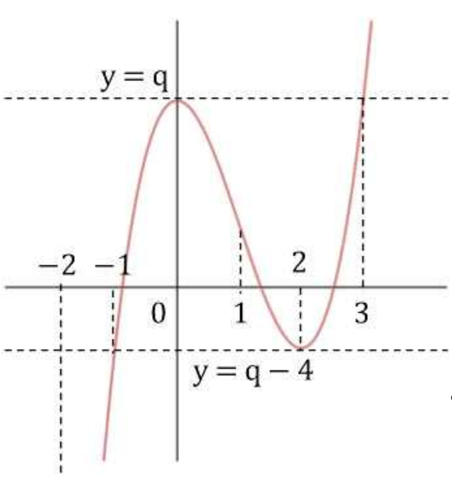
5개의 점에서 극점을 가지는데요? 되네요. 지금 그래프는 극소점이 x축 아래로 내려가서 접어 올렸을 때 x축과 만나는 3개의 점＋이미 있던 극대점, 극소점 해서 5개의 극점을 갖게 되었어요. 그러면 결국 극소점이 x축 아래로 내려가야겠네요. 따라서 극솟값이 x축 아래여야 하니까 $q-4p^3<0$이고 자연수니까 $0<q<4p^3$입니다.

(나)조건에서 $|f(x)|$의 $-1\le x\le 1$에서 최댓값과 $-2\le x\le 2$에서 최댓값이 같다고 합니다. 이거도 그려봐야 알겠는데요?

어... 그런데 지금 그래프는 $x=p$에서 변곡점, $x=2p$에서 극소점 이런식으로 나뉘어져 있잖아요. $x=1$은 어디에 포함되는 거죠? $x=2$는요? 이거 때문에 그래프를 그리는 게 불가능해요. 그럼 어쩌죠?
아까 p가 자연수라고 했잖아요. 그럼 그냥 넣어보면 되죠. 넣어봅시다.

3-1) $p=1$일 때

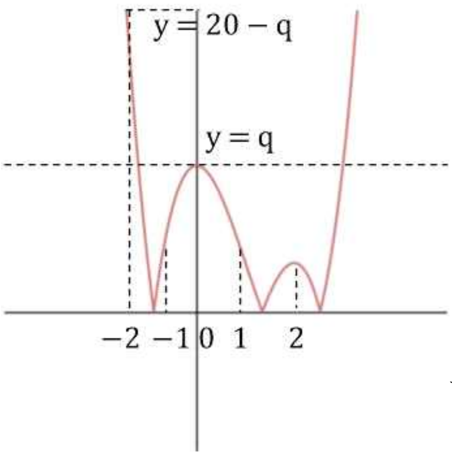
$p=1$이면 $f(x)=x^3-3x^2+q$이구요, $x=1$에서 변곡점, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $q-4$입니다. 그리고 $0<q<4p^3$니까 $0<q<4$이네요.



이렇게 됩니다. 이제 접어 올려야 하는데.... 문제가 있네요. 극댓값과

접어 올린 극솟값 중 어느 게 더 큰 거죠?

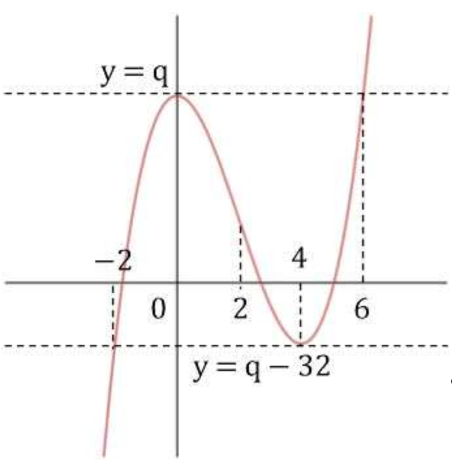
그런데 그걸 따져보지 않아도 되겠네요. $f(-2) = q - 20$이잖아요. $q < 4$라고 했으니까 음수이죠? 절댓값 씌우면 $20 - q$입니다. $-2 \leq x \leq 2$에서 최댓값은 $20 - q$이에요. 이 범위 내에 함수를 잘 관찰해보세요. 극댓값인 q도 최대 3이구요, 극솟값인 $q - 4$를 접어 올린 $4 - q$도 최대 3입니다. 반면 $20 - q$은 최대 17이죠. 그러니까



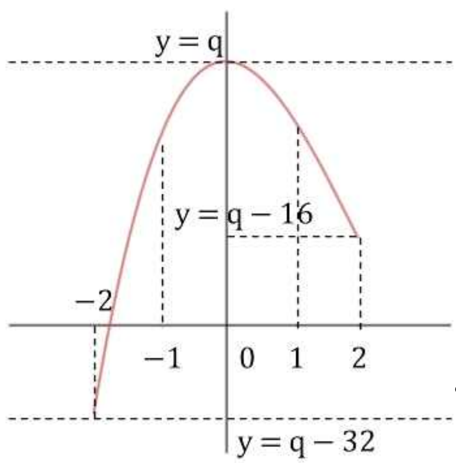
그림이 이렇게 되어서 $-1 \leq x \leq 1$에서의 최댓값과 $-2 \leq x \leq 2$에서의 최댓값이 같을 수가 없어요. $p = 1$일 때는 조건에 맞지 않습니다.

3-2) $p = 2$일 때

$p = 2$일 때 $f(x) = x^3 - 6x^2 + q$이구요, $x = 2$에서 변곡점, $x = 4$에서 극소이고 극솟값은 $q - 32$입니다. 그리고 $0 < q < 4p^3$니까 $0 < q < 32$이네요. 그런데 q는 25이하의 자연수니까 $0 < q \leq 25$라고 할게요. 나중에 헷갈릴 것 같아요. 그리고 이번에는 그래프를 $-2 \leq x \leq 2$범위에서 짜를게요. 어차피 딴 부분은 볼 필요가 없으니까요. 그러면 범위의 경계인 $x = 2$에서 함숫값도 구해봅시다. $f(2) = q - 16$이네요. 그래프는 대충

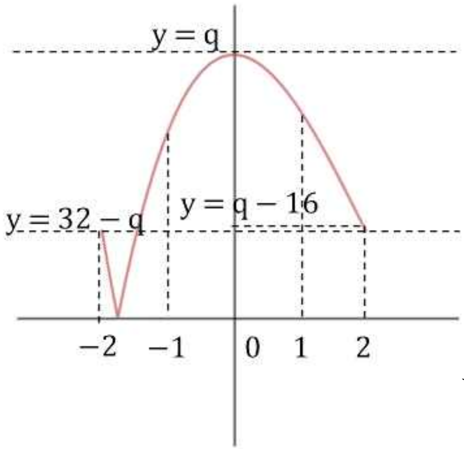


이렇게 되구요, 짜르면



이렇게 됩니다.

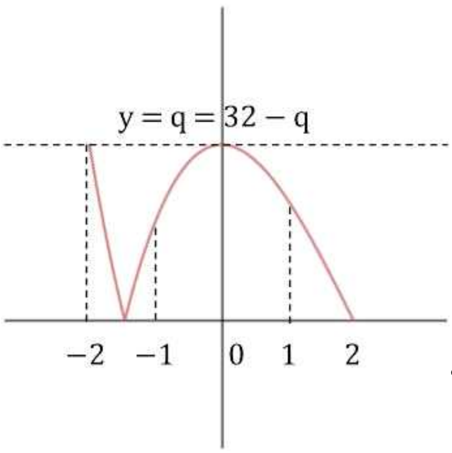
이때 절댓값 씌우고 $-1 \leq x \leq 1$과 $-2 \leq x \leq 2$에서 최댓값을 비교해야 하잖아요. 그런데 $f(x)$의 최댓값인 q와 최솟값인 $q - 32$ 중 접어 올렸을 때 어느 게 더 큰가요? 만약 q가 크다면



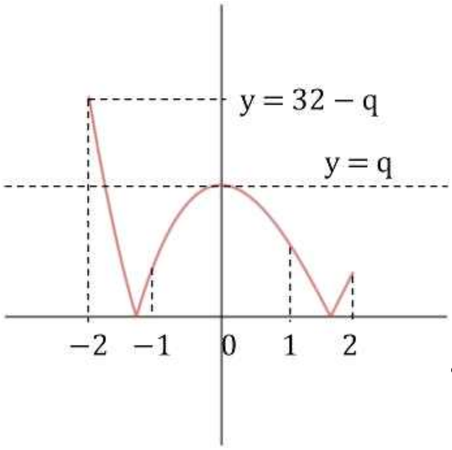
그래프는 이렇게 됩니다. 이러면 $-1 \le x \le 1$에서 최댓값은 q이고 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값도 q네요. 같죠!

이거 q를 구해봅시다. 일단 최댓값인 q가 최솟값인 $q-32$를 접어 올린 $32-q$보다 크잖아요? 따라서 $q > 32-q$이고 $q > 16$입니다. 일단 $16 < q \le 25$에서는 되네요.

그럼 같으면요?



이렇게 되네요. 이것도 가능하잖아요! $-1 \le x \le 1$에서 최댓값도 q이고 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값도 q입니다. $q = 32-q$이고 $q = 16$이네요. $q = 16$일 때 가능합니다.
그러면 최솟값을 접어 올린 $32-q$가 더 크면요?



이렇게 됩니다. 이러면 $-1 \le x \le 1$에서 최댓값과 $-2 \le x \le 2$에서

최댓값이 다른데요? $-1 \le x \le 1$에서는 q이고(범위에 따라서 아닐 수도 있습니다. 여기서는 다르다는 거를 보여주기 위해서 q로 설정한 거예요. 예를 들어 $q=7$이라면 $x=0$에서 함숫값 $f(0)=|f(0)|=7$보다 $x=2$에서 접어 올린 $|f(2)|=9$가 더 커요.) $-2 \le x \le 2$에서는 $32-q$이잖아요. 따라서 $q<32-q$ $(q<16)$일 때는 안 됩니다.

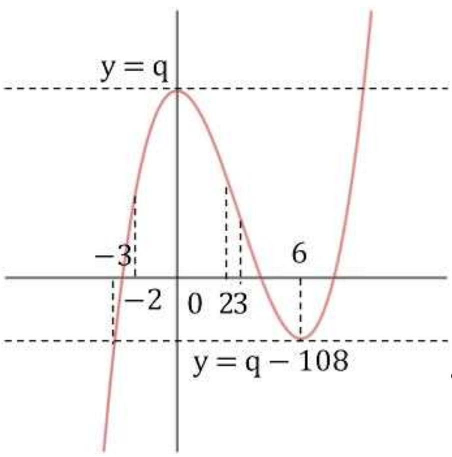
정리해보면 $p=2$일 때는 $16 \le q \le 25$이어야 합니다. 총 10개가 있네요.

3-3) $p=3$일 때

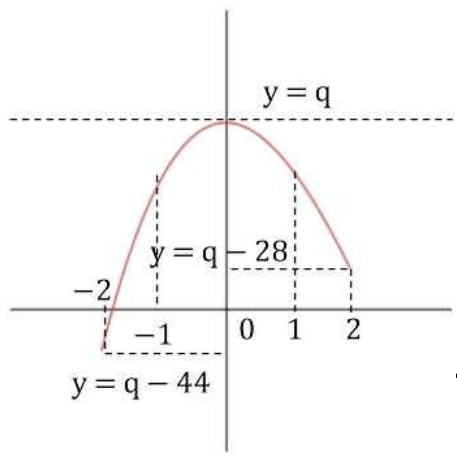
$p=3$일 때 $f(x)=x^3-9x^2+q$이고 $x=3$에서 변곡점, $x=6$에서 극소이고 극솟값은 $q-108$입니다.

$0<q<4p^3$니까 $0<q<108$이지만 q는 25이하의 자연수니까 $0<q \le 25$이네요. 이번엔 약간 다른데요? $-2 \le x \le 2$범위에서 짜르고 범위의 경계인 $x=2$에서 함숫값도 구해보면 $f(2)=q-28$이네요. 그런데 이번에는 $x=-2$에서 함숫값도 구해야겠어요. $x=-2$에서 극솟값과 겹치지 않잖아요. $f(-2)=q-44$입니다.

그래프는 대충



이렇게 되고 짜르면

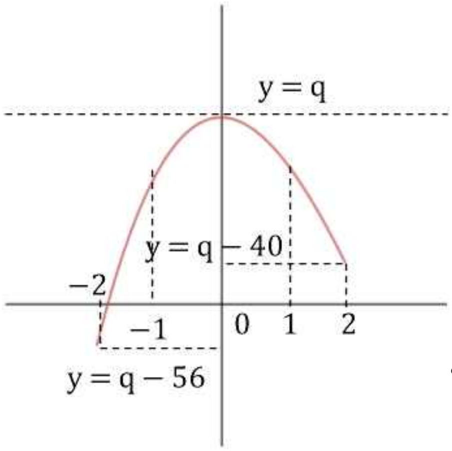


이렇게 되네요.

아까 $p=2$랑 똑같은 상황입니다. $|f(x)|$의 최댓값이 같으려면 현재 $f(x)$의 최댓값인 q가 최솟값을 접어 올린 $44-q$보다 크거나 같아야 하죠. 따라서 $q \ge 44-q$해서 $q \ge 22$입니다. 따라서 $22 \le q \le 25$이고 가능한 q는 4개가 있네요.

3-4) $p=4$일 때 $(p \ge 4$일 때$)$

$p=4$일 때 $f(x)=x^3-12x^2+q$입니다. $0<q \le 25$이구요. $-2 \le x \le 2$범위에서 짜르고 범위의 경계인 $x=2$와 $x=-2$에서 함숫값도 구해보면 $f(2)=q-40$이고 $f(-2)=q-56$입니다. 그래프는 대충



이렇게 되네요. 따라서 현재 $f(x)$의 최댓값인 q가 최솟값을 접어 올린 $56-q$보다 크거나 같아야 하니까 $q \geq 56-q$해서 $q \geq 28$인데... $0<q \leq 25$의 범위를 애초에 넘어서는데요? p가 이거보다 커지면 최솟값인 $f(-2)$는 더 작아지겠죠. $f(-2)=q-12p-8$인데 p가 커지면 점점 더 작아지잖아요. 그러면 자연스럽게 $q \geq 12p+8-q$ $(q \geq 6p+4)$에서 $6p+4$는 더 커질 거예요. $0<q \leq 25$의 범를 벗어나게 되는 거죠. 따라서 $p \geq 4$일 때는 가능한 $(p,\ q)$가 없습니다.

지금까지 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $p=2$일 때 10개, $p=3$일 때 4개해서 $10+4=14$입니다.

18. 정답 13

1) 조건해석, 등차수열 $a_n = a+(n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기

$\{a_n\}$이 등차수열인데 공차가 양수랍니다! 그러면 일단 $a_n = a+(n-1)d$ $(d>0)$이라고 하면 되겠죠?
(가)조건에서 $|a_5| = a_6$이라고 하네요. 생각을 좀 해봅시다. 아까 공차가 양수라고 했죠? 그러면 무조건 $a_5 < a_6$이어야 해요. 그런데 a_5에 절댓값을 씌우면 같아지네요. $a_5 = a_6$일 수는 없으니까 $-a_5 = a_6$이 되어야겠어요. $a_5 = a+4d,\ a_6 = a+5d$이니까 $-a-4d = a+5d$이고 $a = -\dfrac{9}{2}d$이네요.

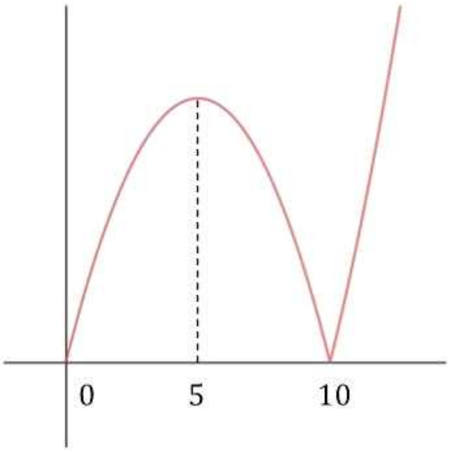
$a_n = \left(n-\dfrac{11}{2}\right)d$ $(d>0)$입니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

(나)조건에서 $|S_n| = 24$를 만족시키는 자연수 n이 3개가 있다네요. 일단 S_n부터 구해볼까요? 등차수열의 합 공식에 의하여 $S_n = \dfrac{(a_1+a_n)}{2} \times n = \dfrac{d}{2}n(n-10)$입니다.

여기에 절댓값을 씌운 값이 24가 되는 자연수 n이 3개가 있다구요? 음...

그런데 이거 뭔가 이차함수와 비슷하지 않나요? 최고차항의 계수가 양수인, $x(n)$축과 $n=0$, $n=10$에서 만나고 대칭축이 $n=5$인 이차함수인 거죠. 그러니까 대충



이렇게 되겠네요.

3) 자연수 보이면 숫자 넣기

아니 그런데 이 $y=|S_n|$이라는 함수와 3개의 점에서 만나는 직선은 매우 많은데요? 그림을 보세요!

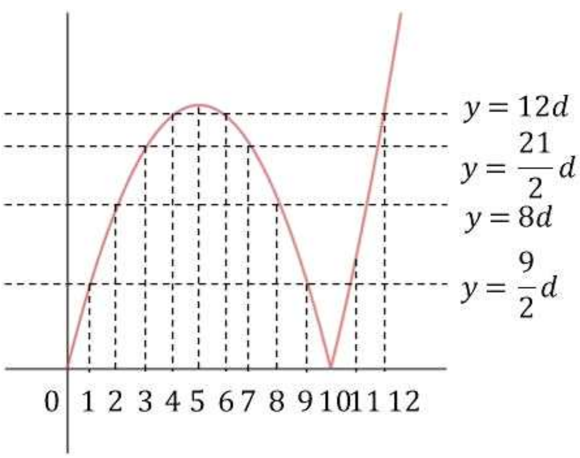
"자연수"라고 했잖아요. 그럼 천천히 넣어봐야죠. 일단

$|S_1|=|S_9|=\frac{9}{2}d$, $|S_2|=|S_8|=8d$, $|S_3|=|S_7|=\frac{21}{2}d$, $|S_4|=|S_6|=12d$, $|S_5|=\frac{25}{2}d$입니다. 음...

$n>10$일 때를 해봅시다. $|S_{11}|=\frac{11}{2}d$인데 뭐 같은 값을 가지는 게 없네요. 그리고 $|S_{12}|=12d$입니다. 어?

이거 아까 봤잖아요! $|S_4|=|S_6|=|S_{12}|=12d$이네요.

그리고 $|S_{13}|=\frac{39}{2}d$이니까 여기부터는 3개의 점에서 만날 수가 없게 되네요. 그러니까



이렇게 되겠네요!

이렇게 되면 3개의 점에서 만나는 건 $n=4,\ 6,\ 12$일 때 $|S_4|=|S_6|=|S_{12}|=12d$만 있어요. 이게 24가 되어야겠죠? 따라서 $12d=24$이고 $d=2$입니다.

$a_n=2n-11$이니까 $a_{12}=13$이네요.

19. 정답 ②

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|a_{n+1}=a_{n+1}$이고 $a_n \times a_{n+2} \le 0$이랍니다.

일단 먼저 $|a_n|a_{n+1}=a_{n+1}$부터 볼게요. a_{n+1}을 넘기고 정리하면 $a_{n+1}(|a_n|-1)=0$이죠? 따라서 $a_{n+1}=0$이거나 $|a_n|=1$이어야 합니다. 절댓값을 풀면 $a_{n+1}=0$이거나 $a_n=-1$이거나 $a_n=1$이어야 한다는 거죠.

그리고 $a_n \times a_{n+2} \le 0$는 뭐... n번째 항의 값과 $n+2$번째 항의 값을 곱하면 0이거나 음수여야 한다는 거네요. 이건 나중에 봐야할 것 같아요.

아래에 $a_n=n^2$을 만족시키는 자연수 n이 1개 있고 $a_3=1$, $a_6=0$이랍니다. 어? 방금 $a_{n+1}=0$이거나 $a_n=-1$이거나 $a_n=1$이어야 한다고 했었잖아요. n에 숫자를 막 집어 넣어볼까요? $n=2$를 넣으면 $a_3=0$이거나 $a_2=-1$이거나 $a_2=1$이어야 합니다. 그런데 지금 a_3은 0이 아니라 1이잖아요? 그러면 무조건 a_2는 -1이거나 1이어야 합니다.

그런데 $n=1$을 넣으면 $a_2=0$이거나 $a_1=-1$이거나 $a_1=1$이어야 하죠. 방금 a_2는 -1이거나 1어야 한다고 했잖아요. 0은 아니니까 a_1 역시 마찬가지로 -1이거나 1이어야 하겠네요.

이번엔 위로도 올라가봅시다. $n=3$을 넣으면 $a_4=0$이거나 $a_3=-1$이거나 $a_3=1$이어야 합니다. 그런데 이미 $a_3=1$이네요. 그러면 a_4는 꼭 0이 아니어도 되겠어요. 이미 $a_4(|a_3|-1)=0$가 성립하잖아요. 이거는 둘 중 하나만 성립하면 나머지는 성립하든 아니든 상관없는 거니까요.

그리고 $n=5$를 넣으면 $a_6=0$이거나 $a_5=-1$이거나 $a_5=1$이어야 하는데 이미 $a_6=0$이니까 이것도 마찬가지로 a_5는 반드시 -1 또는 1일 필요는 없습니다.

하지만 $n=4$를 넣으면 $a_5=0$이거나 $a_4=-1$이거나 $a_4=1$이어야 합니다. 둘 중 하나는 만족시켜야 해요. 이러면 케이스가 나뉘겠네요.

$n=6$을 넘어버리면 모든 항의 값이 0이 되어야 합니다. $a_7=0$이거나 $a_6=-1$이거나 $a_6=1$이어야 하는데 $a_6=0$이니까 $a_7=0$이구요, 나머지들도 마찬가지로 다 0이 됩니다.

뭐 아무튼 케이스를 나누기 전에 대략적으로 정리 좀 해봅시다.

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

2) 케이스 분류

2-1) $a_4 = -1$이거나 $a_4 = 1$일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

일단 $a_3 = 1$인데 $a_n \times a_{n+2} \leq 0$에 의하여 $a_1 \times a_3 \leq 0$이니까 $a_1 = -1$이어야죠? 곱해서 0이거나 음수가 되어야 하잖아요.

그리고 $a_n = n^2$을 만족시키는 자연수 n이 하나 있어야 합니다. 지금 표를 보면 대충 $n=5$에서 성립해야 할 것 같은 느낌이 들죠? $n=6$ 이후부터는 계속 0이니까 상관없구요. $a_1 = -1$이니까 성립 안 하고 a_2, a_3, a_4는 아예 숫자가 벗어났잖아요.

그런데 $a_3 = 1$이고 $a_3 \times a_5 \leq 0$이니까 a_5는 0 또는 음수가 나와야 하지 않나요? $a_n = n^2$가 성립하는 자연수 n이 없네요.

2-2) $a_5 = 0$일 때

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

아까랑 마찬가지로 $a_1 = -1$입니다. 그리고 $a_n = n^2$을 만족시키는 자연수 n이 하나 있어야 하는데 표를 보면 관련 있는 건 $n=4$뿐이네요. $a_1 = -1$이고, a_5부터는 계속 0이고, a_2와 a_3는 아예 숫자가 관련이 없구요.

$a_4 = 16$입니다.

그리고 $a_2 \times a_4 \le 0$이어야 하죠? $a_2 = -1$입니다. 결국

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-1	-1	1	16	0	0

이렇게 되어야 하겠네요. $\sum_{n=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$입니다. 답은 ②번이네요.

20. 정답 ②

1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

그림에 대충 다 나와 있는 것 같네요. $y = -x + 7$가 있는데 얘가 $y = 2^{ax} + b$와 만나는 점이 A,

$y = \frac{1}{a}\log_2(x-b)$와 만나는 점이 B랍니다. 그리고 A에서 x축에 내린 수선의 발이 C인데 이 점은

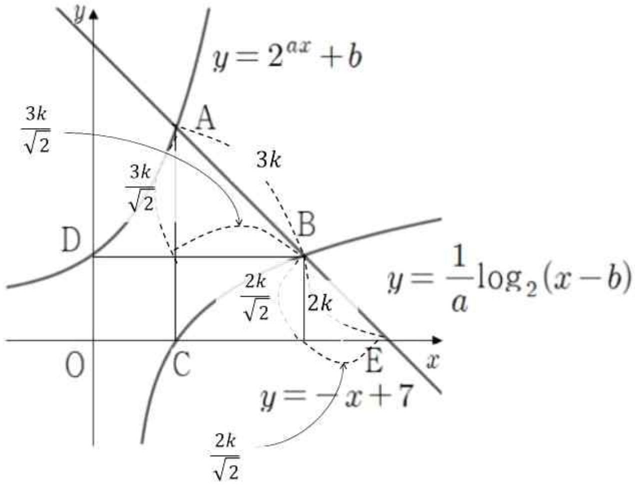
$y = \frac{1}{a}\log_2(x-b)$가 x축과 만나는 점이구요. B에서 y축에 내린 수선의 발이 D인데 이 점은 $y = 2^{ax} + b$가

y축과 만나는 점이랍니다. 그리고 $y = -x + 7$가 x축과 만나는 점이 E라네요.

일단 E의 좌표는 알겠어요. E(7, 0)이네요. 그리고 나머지는...... 일단 다른 조건부터 봅시다. 함부로 좌표를 잡지 말라고 했잖아요?

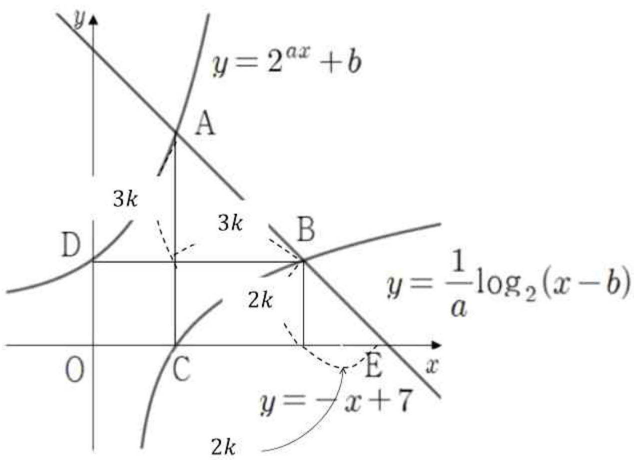
그리고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 3 : 2$랍니다. 이거부터 해볼까요? 일단 $\overline{\mathrm{AB}} = 3k$, $\overline{\mathrm{BE}} = 2k$라 해봅시다.

그러면



이렇게 되겠네요.

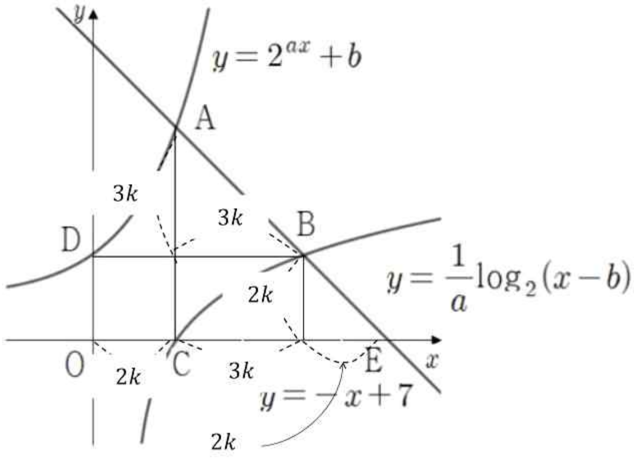
그런데 루트가 있으니까 너무 불편해요. 그냥 차라리



이렇게 설정합시다. 이거 어차피 이렇게 해도

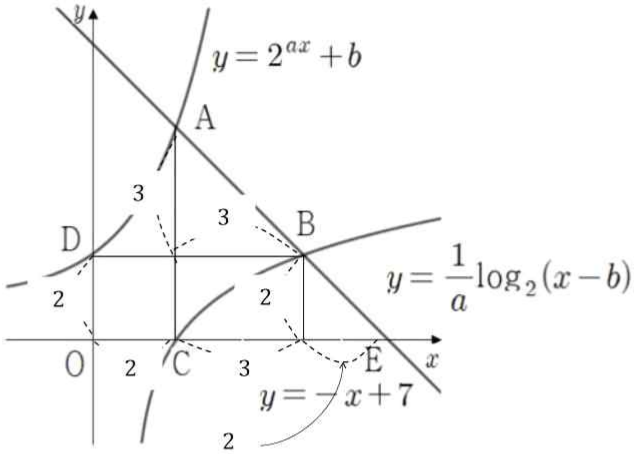
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=3:2$가 유지되잖아요?

그런데 $y=2^{ax}+b$와 $y=\dfrac{1}{a}\log_2(x-b)$는 서로 역함수 관계에 있죠? 그러면 $y=-x+7$와 y축이 만나는 점을 F라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{FA}}=3:2$도 성립합니다. 따라서



이렇게 되겠네요. $2k+3k+2k=7$이 되고

$k=1$이네요.



이렇게 됩니다.

D의 좌표는 (0, 2)이고 A의 좌표는 (2, 5)이네요. 결국 $y=2^{ax}+b$는 (0, 2)와 (2, 5)를 지나야 합니다. 그럼 계산만 하면 되겠네요. $y=2^{ax}+b$가 (0, 2)를 지나니까 $b+1=2$이고 $b=1$입니다. $y=2^{ax}+1$가 (2, 5)를 지나니까 $2^{2a}+1=5$이고 $2^{2a}=2^2=4$입니다. $a=1$이네요. $a+b=2$이고 답은 ②번입니다.

21. 정답 ②

1) 문제해석

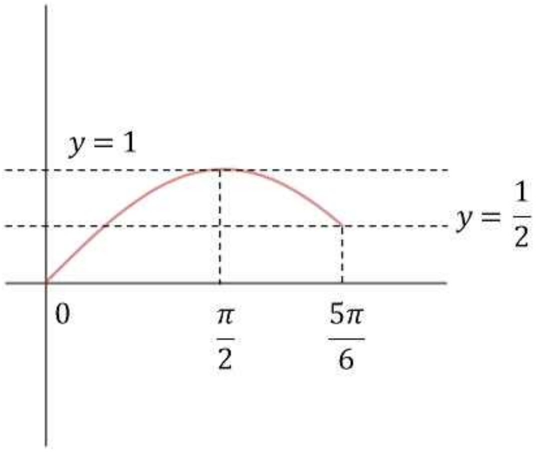
$0 \le x < \frac{5}{6}\pi$에서 $f(x)=\cos^2 x+a\sin x+2$가 $x=b$에서 최댓값 $\frac{13}{4}$을 갖는답니다. 하나의 문자로 정리되어 있어야 뭘 하든 말든 하겠죠? $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용해봅시다. $f(x)=-\sin^2 x+a\sin x+3$입니다.

이차함수랑 모양이 비슷하죠? $\sin x=t$라 하면 $f(x)=-t^2+at+3$인 이차함수입니다.

범위도 확인해볼게요. $\sin x=t$인데 $0 \le x < \frac{5}{6}\pi$이잖아요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

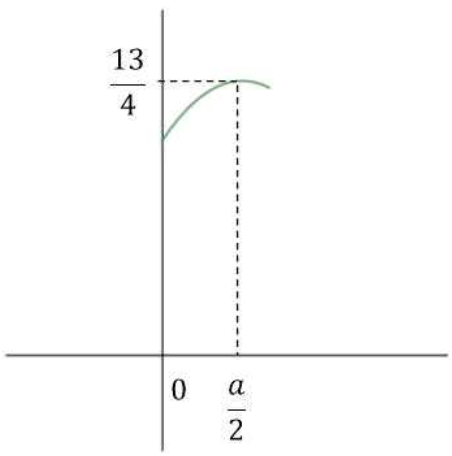
$y=\sin x$를 그리면



이렇게 되네요. 범위에 끝자락에 해당하는 $x = \frac{5\pi}{6}$에서

함숫값이 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$이네요. 결국 $0 \le t \le 1$이 됩니다. 우리는 $f(x) = -t^2 + at + 3$라는 함수에서 $0 \le t \le 1$의 범위만 보면 되는 거에요.

축이 $t = \frac{a}{2}$인 함수인데 $0 < a < 2$이니까 축이 $0 \le t \le 1$의 범위 안에 있네요? 따라서 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 결국 $x = \frac{a}{2}$에서 최댓값을 가지죠? 이 값이

$\frac{13}{4}$이니까 $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 3 = \frac{13}{4}$이고 $a^2 = 1$인데 $0 < a < 2$이니까 $a = 1$입니다.

$f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 3$이네요.

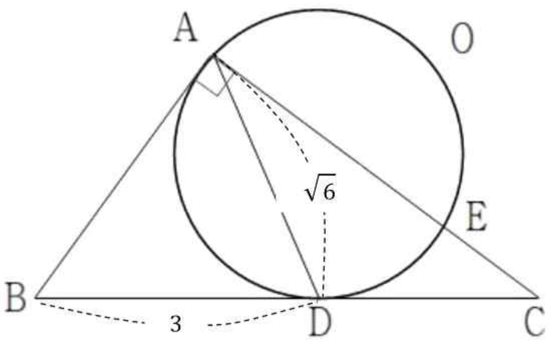
그런데 주의할 점은 $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 3$가 최대가 되는 지점은 $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$이 아니라는 거에요! 왜냐면 우리는 $\sin x = t$로 치환했잖아요. 따라서 우리가 구해야 하는 $x = b$는 $\sin x = \frac{1}{2}$를 만족시키는 x값입니다.

아까 그림 그려놨던 거 보면 $x = \frac{5\pi}{6}$에서 함숫값이 $\frac{1}{2}$이었는데 $0 \le x < \frac{5}{6}\pi$이니까 등호가 없잖아요? 따라서 대칭축인 $x = \frac{\pi}{2}$에 대칭되는 부분에 있는 $x = \frac{1}{6}\pi$가 b입니다. $a = 1$이고 $b = \frac{1}{6}\pi$이니까 $\frac{ab}{\pi} = \frac{1}{6}$이네요. 답은 ②번입니다.

22. 정답 9

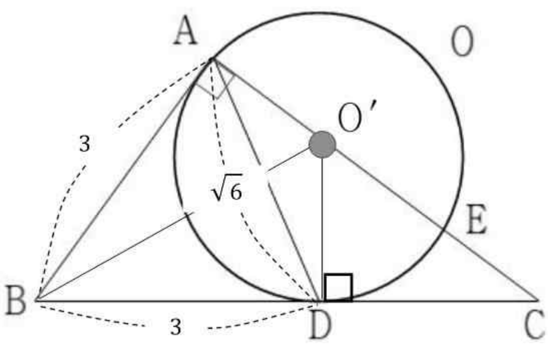
1) 그림 있으면 그림 보면서

일단 다 표시 좀 해둡시다.



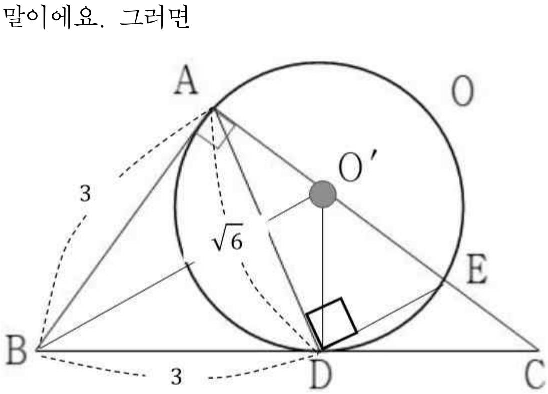
이렇게 말이죠.

그리고 지금 원 O 위의 점 A에서의 접선이 선분 AB이고 원 O 위의 점 D에서의 접선이 선분 BD이잖아요. 그러면 원의 중심과 접하는 점을 잇고 수직표시 해줘야죠. 각의 이등분선도 그려주구요. 원의 중심을 O′이라 하면



이렇게 되죠? 삼각형 O′BD와 O′AB는 선분 BO′를 공유하고, 직각을 가지고 있고, 두 삼각형 모두 한 변의 길이가 원의 반지름과 같으므로 합동입니다. 따라서 선분 AB의 길이와 선분 BD의 길이는 같아야 하겠네요.

또한 원 O의 지름이 선분 AE인데 선분 AE를 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형이 있네요? ADE 말이에요. 그러면



이렇게도 표시 해줘야죠?

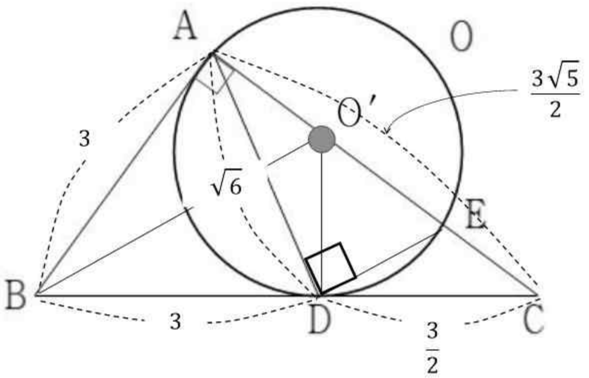
어? 우리가 구해야 하는 건 삼각형 ADE의 넓이인데 높이가 $\sqrt{6}$으로 주어졌네요. 그럼 결국 우리는 $\overline{\mathrm{DE}}$만 구하면 되겠어요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 세 변의 길이

그런데 이러면 정해진 삼각형이 있네요. ABD는 세 변의 길이가 모두 나와 있어요. 이러면 코사인법칙을 통해 나머지 각을 알 수 있죠? $\angle \mathrm{ABC} = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{3^2+3^2-\sqrt{6^2}}{2\times3\times3} = \dfrac{2}{3}$입니다.

그런데 이거 삼각형 ABC에도 적용할 수 있죠? $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{3}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{2}{3}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{9}{2}$입니다. 그러면 $\overline{\mathrm{DC}} = \dfrac{3}{2}$이네요.

ABC는 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용하면 $3^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2$이고 $\overline{\mathrm{CA}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$가 됩니다.



이렇게 되는 거죠.

그리고 $\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$이잖아요? $\cos\theta$를 알면 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$을 사용해서 추가적으로 알 수 있는 것이 있죠.

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$는 $y > 0$인 y축이니까 sin을 cos으로 바꾸고, 예각인 θ만큼 반시계방향으로 돌리면 사인값은 양수니까 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$으로 바뀌잖아요? 따라서 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{2}{3}$입니다.

이러면 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{2}{3}$을 이용해서 삼각형 O′DC에 대하여 정리할 수 있죠. $\overline{\mathrm{O'D}}$는 원 O의 반지름인 r이니까 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\overline{\mathrm{O'D}}}{\overline{\mathrm{CO'}}} = \dfrac{r}{\overline{\mathrm{CO'}}} = \dfrac{2}{3}$이고 $\overline{\mathrm{CO'}} = \dfrac{3}{2}r$입니다.

그럼 여기도 피타고라스를 사용해야겠네요. $r^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}r\right)^2$이고 $r^2 = \dfrac{9}{5}$입니다.

그리고 삼각형 ADE도 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용할 수 있겠네요. $\overline{\mathrm{AE}} = 2r$이니까

$\sqrt{6^2}+\overline{\mathrm{DE}}^2=(2r)^2$이고 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ 입니다.

이제 넓이를 구하면 되겠네요. $S=\dfrac{1}{2}\times$(높이 $\sqrt{6}$)$\times$(밑변 $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$)$=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ 입니다. 따라서 $5S^2=9$이네요.