-2022학년도 대학수학능력시험-

김기대 X 우주설 수능직전 모의평가 정답 및 해설

수학 영역

공통 정답

1	④	2	③	3	③	4	②	5	⑤
6	①	7	②	8	⑤	9	①	10	④
11	④	12	③	13	②	14	⑤	15	①
16	32	17	16	18	12	19	22	20	64
21	19	22	96						

확률과 통계 정답

23	②	24	③	25	④	26	⑤	27	④
28	③	29	254	30	99				

미적분 정답

23	②	24	⑤	25	③	26	②	27	①
28	⑤	29	7	30	18				

(일부 문항을 제공해주신 '그린란드'님께 감사의 말씀 드립니다.)

11/19~11/22 (1주차)	11/22~27 (2주차)	11/29~(3주차)
〈학교별 Final〉 카톨릭 의예과, 서강대, 성균관, 경희대, 건국대, 과기대, 숭실대+항공대 진행	〈학교별 Final〉 한양대, 중앙대, 세종대+광운대, 고려대 약대, 경북대+부산대 진행	〈학교별 Final〉 인하대, 아주대 진행

〈수리논술 액기스 Final〉

논술노베특강(3강) / 미적심화특강(1강) / 확통완성(3회) / 기하완성특강(2회)

더 이상 뇌피셜 정보로 수업하는 논술 Final은 No! 쓸모없는 교과외공식과 대학수학만 가르치는 논술수업도 No!

대학별 성향에 맞는 문제만 엄선하여 짧은 시간에 최고의 효율을 선물하는 Final 수업입니다.

우수한 퀄리티의 모의고사로 증명한 '문제를 만드는 재주와 안목'은 수리논술에서도 적용됩니다.

특징)

1. 학교별 특성에 맞는 모의고사 통해 초절정 시성비 제공, 어려운 문제 쉽게 푸는 다양한 접근법제시
2. 21년 한양대 모의논술 적중+이화여대 모의논술 수석, 20년 시립대 전체수석, 19년 한양대 모범답안자 배출 등등 보여지는 지표로도 항상 증명하는 참된 Final
3. 해설 후 답안재작성하는 시간을 부여하는 특이한 시간구성으로, 빈 답안지를 유도하여 쉽게 첨삭을 넘겨버리는 흔한 타 Final보다 훨씬 더 알찬 첨삭을 받을 수 있는 수업구성!!
4. Only 수학과/수교과 출신으로 구성된 10인 최강 첨삭팀 (업계최고수준! 박사과정 3인, 석사 및 학부졸업 5인 포함)

문항 제작자

* 우주설

중앙대학교 소프트웨어공학

우주설모의평가 및 N제 저자

알티스수학학원 강북본원 공동대표

분당알티스학원 정자본원 공동대표

문항 제작자

* 김기대T

기대모의고사 저자 7년차

고려대학교 수학과 13 (수능 100 총 5회)

수리논술 수학과 6회 합격 (전체수석 포함)

대치오르비학원 출강 (수리논술 Final 진행)

!!수리논술 Final 신청링크 QR코드!!

1주차 (Live/비대면)	채점 or 첨삭	소개 (1주차 수업은 오직 네이버 Band 비대면으로만 진행, 2,3주차는 대면+비대면 동시진행)
가톨릭 의예과반 (2회)	O	1. 모의고사 1회분 응시 이후 해설강의 수강 + 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 채점 or 첨삭 O
건국대 (이과+수의예과) (2회)	O	1. '기하'가 빠졌지만 기하학 문제는 60% 이상 내왔던 건대 특성 맞춤 모의 2회 응시 및 해설강의 2. 채점 or 첨삭 O
서강대 (1회)	X	1. 수학적 의미가 적으나 복잡한 계산이나 증명을 주로 내는 서강대 타겟 모의고사 1회분 및 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 컴팩트한 수업으로 경향예측 및 실전전략수립
숭실대/항공대 (1회)	X	1. 모의고사 1회분 및 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 컴팩트한 수업으로 경향예측 및 실전전략 수립
경희대A반 (이과전체) -토요일 시험반- (2회)	O (금 제출)	1. 시험일정에 맞춰 반 선택 (모의고사 각각 2, 3회 진행 및 주요 기출 요소 정리) 2. 채점 or 첨삭 O
경희대B반 (이과+약대) -일요일 시험반- (3회)	O (토 제출)	
성균관대 (이과전체+약대) (2회)	O	1. 하나의 제시문에 관련된 소문항을 차근차근 풀어가는 연습이 필요한 학교. 난이도 자체는 높지 않으므로 2번의 특강으로 수리논술 워밍업 후 시험보러가면 큰 소득이 있기에 좋은 학교! 2. 채점 or 첨삭 O
서울과기대 (월요일 시험반)(3회)	O	1. 시험일정에 맞춰 반 선택 (모의고사 각각 2, 3회 진행 및 주요 기출 요소 정리) 2. 채점 or 첨삭 O
서울과기대 (화요일 시험반) (4회)	O	

수학 영역

2주차 (대면+비대면)	소개
한양대 (이과전체)	1. 한양대 모범답안자 배출, 22학년도 모의논술 문항 적중 등 기대T의 시그니쳐 강의 중 하나 2. 철저히 한양대 스러운 문제들로 구성한 모의고사 문제들에 곁들여지는 'Smart, But simple'을 강조하는 해설강의가 핵심 3. 출제스타일이 매우 유사한 이화여대 지원자도 수강 추천
중앙대 (이과+의예+약학)	1. 무난한 난이도로 대부분 출제되나 몇몇 킬러문제에 의해 당락이 결정되는 만큼 충분한 문풀 준비가 필요한 학교 2. 과와 관련없이 비슷한 난이도일 뿐더러 공통된 시험지형식으로 출제되는 학교이므로 의예과나 약학과, 또는 안성캠 지원자들도 상관없이 수강 가능
세종대+광운대 연합반	1. 제시문이 있냐(광운) 없냐(세종)로 난이도가 결정될 뿐 유사한 문제스타일을 가진 두 학교를 분석하면서 기출대비(=지원학교문제)와 예상문제대비(=상대학교문제)를 동시에 할 수 있는 강좌 2. 두 학교 사이의 미묘한 출제경향차이 또한 강조해주기 때문에 둘 중 한 학교에 지원했더라도 수강 추천 (과년도 [세종:광운:둘다지원] 수강생비율 [3:4:3]) 3. 해설지만 봐서는 억지였던 풀이들이 수업을 들은 후 자연스럽게 익혀지는 신기한 경험 가능!
고려대 세종캠 약대	1. 고려대 본캠 수리논술 합격 출신 강사의 믿을 수 있는 출제예상 문항선별 안목 2. 논술을 처음 시행하는 약대인 만큼 모의논술에서도 무난한 난이도, 유명한 소재들 위주로 출제됐고 실제시험도 그럴 예정. 다른 학교 수리논술을 준비할 때에도 Base가 돼줄 필수주제 위주로 단기간 정리!
경북+부산 연합반 (Only Live + 비대면)	1. 수능형 스타일을 출제하는 학교들의 연합 Final. (의치약 지원자는 전용 Final 수강할 것!) 2. 고려 세종, 한국외대 지원자 수강 추천 (연세 미래캠 지원자도 수강은 가능하나 확통특강 추가하여 들을 것) 3. 1~3회차는 주로 출제될 수학I, II 위주 진행, 4~5회차 강의는 각 학교별 맞춤문제로 진행함으로써 학교별 개성까지 챙겨갈 수 있는 Final (경북, 외대 : 수학I,II / 부산, 고려:미적)
비고	* 전부 5회 수업 * 모든반 첨삭 제공 * 수업장소 : 대치오르비학원 (대면+비대면 전부 진행)

3주차 (대면+비대면)	횟수	채점 or 첨삭	곁들일만한 추천특강
인하대 (이과전체+의예)	5회	O	논술노베특강, 미적심화특강
1. 수학 3문제 중 2문제는 공통으로 보고 1문제만 의예과전용/공대전용으로 출제되기 때문에 의예과 학생들도 수강가능 (의예과 전용 문제도 준비 O) 2. 어렵기로 소문났지만, 제시문과 새끼문제들을 활용하는 전략만 잘 세워진다면 체감난이도가 확 떨어지는 학교! 준비하지 않은 학생들과 초격차를 내기 쉬운 대표적 학교. 3. 시립대/한양대와 3대 시그니쳐 Final인 인하대 Final, 기대해도 좋습니다.			
아주대 (이과전체+의예)	5회	O	논술노베특강, 미적심화특강
1. 수학 2문제 중 1문제가 이과전체/의예 공통문항이므로 의예과 학생들도 수강가능 1. 홍익대/동국대와 견줄만큼 특이한 출제스타일을 지닌 학교. 타학교 기출이나 적중을 위한 문제풀이보다도 아주대 스타일을 파악하는 데에 중점을 둬야하는 학교.			

논술 액기스 Final (Only Live/비대면)		내용
논술노베특강 (부제: 유베되기 9시간 전)	1강	증명법 (강한수학적귀납법, 귀류법 등)
	2강	미분 (고난도 미분, 사잇값정리와 평균값 정리)
	3강	적분 (고난도 적분, 삼각치환, 여러 적분테크닉)
* 수능에서 기하를 선택했거나, 논술 준비기간이 3개월 미만 필수 수강!! * 사실상 모든 학교에 도움이 되는 액기스 Final		
미적심화특강	1강	젠센부등식 활용, 함수방정식, 미분방정식
* 서울 중상위권 대학 논술 지원자거나 의치한약수 지원자라면 수강 강추하는 수업		
확통완성특강 (기본+심화)	1강	확률과 통계 전반적 개념 (조건부확률, 중복조합)
	2강	포함배제의 원리
	3강	조합의 성질
* 확통이 포함되는 모든 학교에 반드시 도움이 되는 액기스 Final		
기하완성특강 (빈출 위주)	1강	기하 교과서 기본개념 톺아보기
	2강	논술용 고난도 주제정리, 문제풀이
* 수능에서 기하를 선택하지 않은 학생들은 1, 2강 모두 수강해야하며, 논술을 따로 준비하지 않은 기하러들은 1강은 빠르게, 2강은 착실히 들을 것		

수리논술 Final 신청링크 QR코드 =>

<= 수리논술 Final 신청링크 QR코드

수학 영역

공통 해설

1. **생략**

2. **생략**

3. **생략**

4. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 양변을 제곱하면,

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3+2x^2}{x^2+4x}=4$

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ 꼴

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x)$의 일차항의 계수는 3이고,

상수항은 0이다.

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+3x$, $f'(x)=3x^2+4x+3$

6. $\displaystyle\int_0^3 3t^2-at-6\,dt=0$

$\Rightarrow \left[t^3-\dfrac{a}{2}t^2-6t\right]_0^3=9-\dfrac{9a}{2}=0$

$\therefore\ a=2$

7. x에 대한 부등식 $2^x \leftarrow x+n$ 에서

$2^x>-x+n$으로 대소 관계가 바뀌는 지점이

$x=k$이다. 그러므로 $1<k<3$ 이려면,

$x=1$에서 $2^x \leftarrow x+n$이고, $\Rightarrow$ $(3<n)$

$x=3$에서 $2^x>-x+n$이다. $\Rightarrow$ $(11>n)$

$3<n<11$이므로 자연수 n은 7개 가능하다.

8. 닫힌구간 $[-1,2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=2$에서 각각 최댓값 또는 최솟값을 가진다.

문제의 조건에서 $f(-1)+f(2)=9$이므로

$(a^{-3}+2)+(a^0+2)=9 \ \Rightarrow\ a^{-3}=4$

따라서 $f(-4)=a^{-6}+2$

$=(a^{-3})^2+2=18$

9. $f(x)+(x-1)f'(x)=3x^2-2x+1$에서 양변을 부정적분 하면,

$\Rightarrow$ $(x-1)f(x)=x^3-x^2+x+C$ $\quad x=1$을 대입하여

$\Rightarrow$ $(x-1)f(x)=x^3-x^2+x-1$ $\quad$ 양변을 $(x-1)$로 나누면,

$\Rightarrow$ $f(x)=x^2+1$

$f(1)+f'(2)=2+4=6$

10. 자연수 n $(n\ge2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 아래 표와 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

따라서 $f(n)=0$인 경우는

(i) $n^2-9=0$ 이거나

(ii) $n^2-9>0$이고 $n+1$이 짝수인 경우이다.

(i) $n^2-9=0$인 경우는 $n=3$인 경우뿐이다.

(ii) $n^2-9>0$인 경우는 $n>3$인 경우이고, $n+1$이 짝수인 경우는 $n=3,5,7,9,11,13$ 인 경우이다.

따라서 $n=5,7,9,11,13$일 때 $f(n)=0$이다.

(i), (ii)에서

문제의 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$3+5+7+9+11+13=48$

11. 삼각형 ADE은 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{5}{2}$

이다. 따라서

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}=4-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=2$이고, $\angle\mathrm{DBM}=60^\circ$ 이므로

삼각형 BDM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DM}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{BD}}\cdot\overline{\mathrm{BM}}\cdot\cos(\angle\mathrm{BDM})$

$\Rightarrow\ r^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2-2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot2\cdot\cos60^\circ$

$=\dfrac{9}{4}+4-3=\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

12. 함수 $f(x)$는 $a=-1$이어야 $x=1$에서 연속인 것을 이용하자.

$a=-1$일 경우

함수 $f(x)$와 $f(x+2)$가 $x=-1$에서 각각 연속이므로 함수 $f(x)f(x-2)$ 또한 $x=-1$에서 연속이다.

$a\ne-1$일 경우

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속인 함수이므로

함수 $f(x-a+1)$도 $x=a$에서 불연속이다.

함수 $f(x)f(x-a+1)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는 어떤 조건을 만족시켜야 할까?

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이면서 $f(a)=0$이면

함수 $f(x)f(x-a+1)$가 $x=a$에서 연속이다

$a=3$일 때, 성립한다.

$f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 함수 $f(x-a+1)$가 (불연속함수)×(불연속함수)이므로

$x=a$에서 연속일 가능성이 있다.

$a=1$일 때, $f(x)f(x-a+1)=f(x)^2$ 이고

확인해보면 연속이다.

따라서 모든 a의 값의 합은 3이다.

13. 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수임을 알 수 있다.

n은 자연수이므로 조건 (나)에서 (분모)$\to$0이고, 주어진 극한이 존재하므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

$\therefore\ f(0)f'(0)=0$

따라서 다음과 같이 $f(0)=0$인 경우와 $f'(0)=0$인 경우로 나누어 생각한다.

(1) $f(0)=0$인 경우

$f(x)=x^2+ax$ (a는 실수)라 하면

$f'(x)=2x+a$이다.

(i) $a=0$인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\times2x}{x^n}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^n}=2$

이므로 $n=3$이다.

$\therefore\ f(n)=f(3)=9$

(ii) $a\ne0$인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+ax)\times(2x+a)}{x^n}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)(2x+a)}{x^n}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{x^n}=2$

따라서 $n=1$이고, $a^2=2$이다.

$a=\sqrt{2}$인 경우, $f(n)=f(1)=1+\sqrt{2}$

$a=-\sqrt{2}$인 경우, $f(n)=f(1)=1-\sqrt{2}$

이다.

(2) $f'(0)=0$인 경우

$f(x)=x^2+b$ (b는 실수)라 하면

$f'(x)=2x$이다.

이때 $b=0$인 경우는 (1)의 (i)의 경우와 같다.

$b\ne0$인 경우,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f'(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+b)\times 2x}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2bx}{x^n}=2$$

이므로 $n=1$이고, $b=1$이다.

$\therefore\ f(n)=f(1)=2$

(1), (2)에서 $f(n)$의 최댓값은 9, 최솟값은 $1-\sqrt{2}$ 이고, 그 합은

$$9+(1-\sqrt{2})=10-\sqrt{2}$$

이다.

14. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$d>0$ 이므로
$a_{n+1}>a_n\ge 0$ 이면 $|a_{n+1}|-|a_n|=d$
$a_n<a_{n+1}\le 0$ 이면 $|a_{n+1}|-|a_n|=-d$
$a_n<0<a_{n+1}$ 이면 $-d<|a_{n+1}|-|a_n|<d$
이다.

따라서 조건 (가)로부터 $d=3$ 이다.

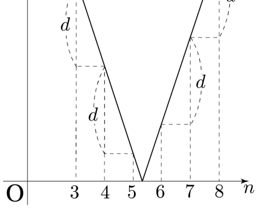
조건 (나)로부터
$a_5<0<a_6$ 이고, $|a_6|-|a_5|=a_6+a_5=1$
이다.
$a_6=a_5+3$ 이므로 $a_5=-1$, $a_6=2$이다.
즉, $a_1=-13$ 이고 $d=3$ 이므로
$\therefore\ a_n=3n-16$,

$$b_n=\begin{cases}-3 & (1\le n<5)\\ 1 & (n=5)\\ 3 & (n>5)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{9}a_kb_k&=-3(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5\times 1\\&\quad+3(a_6+a_7+a_8+a_9)\\&=3(a_6-a_1)+3(a_7-a_2)+3(a_8-a_3)\\&\quad+3(a_9-a_4)+(-1)\\&=3\times 4\times 5d-1=179\end{aligned}$$

(Tip1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$$a_n=a_1+(n-1)d$$
이다. 이를 n에 대하여 정리하면
$$a_n=dn+(a_1-d)$$
이므로, 등차수열의 각 항의 값은 기울기가 d인 직선 위의 점으로 표현할 수 있다.

이를 통해 $y=|a_n|$ 그래프를 ny평면에 그리면 다음과 같다.



그림을 통해 대부분은 $|a_{n+1}|-|a_n|$의 값이 '공차' 또는 '$-$공차'의 값을 가짐을 알 수 있고, 문제의 조건으로부터 공차는 3임을 알 수 있다.

한편 $b_5=1$이므로 a_5와 a_6의 값은 $y=|a_n|$ 그래프의 x절편을 기준으로 서로 반대편에 존재해야 함을 알 수 있다.

따라서 $a_5<0<a_6$ 이므로
$|a_6|-|a_5|=a_6-(-a_5)=1$, $a_6-a_5=3$ 에서
$a_5=-1$, $a_6=2$임을 알 수 있다.

(Tip2)
$a_6-a_1=a_7-a_2=a_8-a_3=a_9-a_4=5d$

15. ㄱ. 극한값의 존재조건을 생각하며
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(3+h+|h|)}{h}=b$를 해석하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1-h)-g(3+h+|h|)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(1-h)-g(3+2h)}{h}$$

(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.
그러므로 $\displaystyle\lim_{h\to 0+}g(1-h)-g(3+2h)=0$

이때, $\displaystyle\lim_{h\to 0+}g(3+2h)=g(3)$ 이므로
$\displaystyle\lim_{h\to 0+}g(1-h)=g(3)$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1-h)-g(3+h+|h|)}{h}$$
$=\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{g(1-h)-g(3)}{h}$ 에서
(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.
그러므로 $\displaystyle\lim_{h\to 0-}g(1-h)-g(3)=0$
이때, $\displaystyle\lim_{h\to 0-}g(1-h)=g(3)$이고,
$\displaystyle\lim_{h\to 0+}g(1-h)=g(1)$이므로
$\displaystyle\lim_{h\to 0+}g(1-h)=\lim_{h\to 0-}g(1-h)=g(1)$이다.
따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

또한, $g(1)=g(3)$을 통해 이차함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=2$임을 알 수 있다. $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=1-a$이고,
$f(x)=a(x-2)^2+1-2a$ 이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(1-h)-g(3+2h)}{h}$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}+\frac{g(3)-g(3+2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\times(-1)$$
$$+\lim_{h\to 0+}\frac{g(3)-g(3+2h)}{-2h}\times(-2)$$
$$=3\times(-1)+f'(3)\times(-2)$$
$$=-3-4a$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1-h)-g(3)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}$$
$$=f'(1)\times(-1)$$
$$=2a$$

극한값의 존재조건에 의해
$-3-4a=2a=b$를 풀면,
$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$을 얻는다.

$f'(1)=1$으로 함수 $x^3+\dfrac{1}{2}$가 $x=1$에서 갖는 미분계수와 다르다.

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 미분불가 (거짓)

ㄷ. $a+b+f(2)=\dfrac{1}{2}$이다. (거짓)

16. **생략**

17. 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ 이므로
$\dfrac{2\pi}{|k|}=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ |k|=4$
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k^2=|k|^2=16$

18. **생략**

19. 22
$x<3$에서 $f'(x)<0$이고, $x>3$에서 $f'(x)>0$ 이므로
$$\int_1^5|f'(x)|dx=\int_1^3-f'(x)dx+\int_3^5f'(x)dx$$
$$=22$$

20.
조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$는
$f(-1)=1$, $f(1)=-1$ 이며
$-1\le x\le 1$에서 감소함수인 경우와
$f(-1)=-1$, $f(1)=1$ 이며
$-1\le x\le 1$에서 증가함수인 경우가 있다.

그래프 개형을 그려서 관찰하면 후자의 경우가 $f(4)$의 값이 더 크게나올 것을 알 수 있다.

$f(x)-x=a(x+1)x(x-1)$ 이라 하자. (단, $a>0$)

$f'(x)=a(3x^2-1)+1$ 에 대하여

$-1 \le x \le 1$ 에서 $f'(x) \ge 0$ 이므로

$a \le 1$ 을 얻는다.

따라서 $f(4)$ 는 $a=1$ 일 때, 최댓값 64이다.

21. $1 \le n \le 6$ 에서 $a_{n+1}=2a_n$ 이면

$a_1=1$ 이고, a_2 부터 a_7 까지 모두 짝수이므로

조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $1 \le n \le 6$ 에서 $a_{n+1}=\log_2 a_n$ 을

만족시키는 n 이 적어도 하나 존재한다.

이때, p 는 자연수 이므로

$a_2=2a_1$ 는 확정적이다.

$a_3=\log_2 a_2=1$ 일 경우

$a_4=2,\ a_5=1\ ,\cdots$

$\sum_{n=1}^{7} a_n=10$ 이므로 조건을 만족시킨다.

$a_3=\log_2 a_2=1$ 를 만족시키는 $p=1$ 이다.

$a_4=\log_2 a_3=2$ 일 경우

$$\sum_{n=1}^{7} a_n=(1+2+4+2+4+2+4)$$
$$=19$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_5=\log_2 a_4=3$ 일 경우

$a_4=8,\ a_5=3\ ,\ a_6=6$ 이 결정된다.

$a_7=12$ 이면 조건을 만족시킬 수 있다.

$a_n=8$ 일 경우 $a_{n+1}=\log_2 a_n$ 이고

$a_n=6$ 일 경우 $a_{n+1}=2a_n$ 이므로

$p=6,\ 7$ 일 때 조건을 만족시킨다.

$a_6=\log_2 a_5=4$ 일 경우

$$\sum_{n=1}^{7} a_n=(1+2+4+8+16+4+8)$$
$$=43$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_7=\log_2 a_6=5$ 일 경우

조건을 만족시킬 수 있다.

$a_n=32$ 일 경우 $a_{n+1}=\log_2 a_n$ 이고

$a_n=16$ 일 경우 $a_{n+1}=2a_n$ 이므로

$p=16,\ 17,\ \cdots,\ 31$ 일 때 조건을 만족시킨다.

그러므로 만족시키는

$p=1,\ 6,\ 7,\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 31$ 이다.

22. 적분과 미분의 관계에서 $g'(x)=|f'(x)|$ 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| \ge 0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$\lim_{x\to-\infty}|f'(x)|=\infty,\ \lim_{x\to\infty}|f'(x)|=\infty$

$\Rightarrow\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$

이므로 함수 $g(x)$ 는 치역이 실수 전체의 집합인 일대일대응이다.

따라서 세 방정식 $g(x)=0$, $g(x)=1$, $g(x)=2$ 의 실근은 각각 유일하게 존재한다.

이때 $g(0)=0$ 이고, 방정식 $g(x)=1$, $g(x)=2$ 의 해를 각각 $x=\alpha,\ x=\beta\ (0<\alpha<\beta)$ 라 하면

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $|g(x)|$ 가 미분가능 $\Rightarrow\ g'(0)=0$

함수 $|g(x)-1|$ 가 미분가능 $\Rightarrow\ g'(\alpha)=0$

함수 $|g(x)-2|$ 가 미분가능 $\Rightarrow\ g'(\beta)=0$

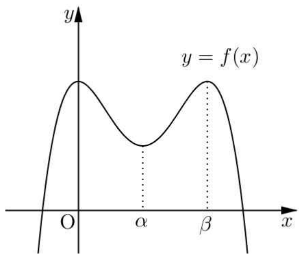
따라서

$$g'(0)=g'(\alpha)=g'(\beta)=0$$
$$\Rightarrow\ f'(0)=f'(\alpha)=f'(\beta)=0$$

한편, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 -1 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 -4 이다.

$\therefore\ f'(x)=-4x(x-\alpha)(x-\beta)$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$g(\alpha)=1$ 이므로

$$\int_0^\alpha |f'(t)|dt=\int_0^\alpha(-f'(t))dt$$
$$=f(0)-f(\alpha)=1$$

$g(\beta)=2$ 이므로

$$\int_0^\beta |f'(t)|dt=\int_0^\alpha |f'(t)|dt+\int_\alpha^\beta |f'(t)|dt$$
$$=1+\int_\alpha^\beta f'(t)dt$$
$$=1+f(\beta)-f(\alpha)=2$$

즉 $f(0)-f(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)=1$ 이므로

$f(0)=f(\beta)$ 이고, $f(\alpha)=f(\beta)-1$ 이다.

따라서 $f(0)=f(\beta)=k$ 라 하면

$$f(x)-k=-x^2(x-\beta)^2$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=-2x(x-\beta)^2-2x^2(x-\beta)$$
$$=-2x(x-\beta)(2x-\beta)$$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\beta}{2}$

$f(\alpha)=k-1$ 이므로

$f(\alpha)-k=-\alpha^2(\alpha-\beta)^2$

$\Rightarrow\ -1=-\dfrac{\beta^2}{4}\times\dfrac{\beta^2}{4},\ \beta=2\ (\because\ \beta>0)$

$\therefore\ f'(x)=-4x(x-1)(x-2)$

$\therefore\ g'(4)=|f'(4)|=96$

확률과 통계 해설

23. 생략

24. 생략

25. 한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 주사위의 눈의 합이 7인 경우는 세 눈의 수가 각각

$(1,1,5),\ (1,2,4),\ (1,3,3),\ (2,2,3)$ 인 경우뿐이다.

세 눈의 수가 $(1,1,5),\ (1,3,3),\ (2,2,3)$ 일 확률은 각각

$${}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{72}$$

이고, 세 눈의 수가 $(1,2,4)$ 일 확률은

$$3!\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{72}\times3+\frac{1}{36}=\frac{5}{72}$$

26. 임의추출한 64개의 표본을 이용하여 구한 표본평균을 $\overline{x}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

이므로

$2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{8}=13.225-10.775=2.45$

$\Rightarrow\ 0.49\sigma=2.45$

$\therefore\ \sigma=5$

27.

확률= (해당경우의 수)÷(전체 경우의 수) 이므로

전체경우의 수 × 확률 = 해당 경우의 수입니다.

문제에서 원탁에 학생을 배치하는 전체 경우의 수는 720입니다.

남학생 3명 중 2명만 이웃할 확률을 구하면,

720에 곱하여서 답을 구할 수 있습니다.

1번째 남학생을 어딘가에 배치하면

나머지 남학생 2명이 앉을 수 있는 자리는 6곳이 남습니다.
6자리 중 남학생 2명이 앉을 자리를 선택 : ${}_6\mathrm{C}_2$
2명만 이웃하도록 앉는 경우의 수 : 9

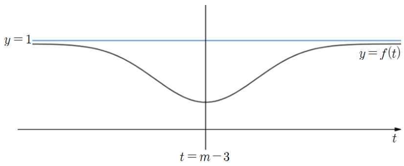
이므로 조건을 만족시킬 확률은 $\dfrac{9}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{5}$입니다.

$720\times\dfrac{3}{5}=432$

28.

확률변수 X의 확률밀도함수의 개형을 그린 뒤
$f(t)=\mathrm{P}(X\le t)+\mathrm{P}(X\ge t+6)$를 관찰하면,
$f(t)=1-\mathrm{P}(t\le X\le t+6)$임을 알 수 있다.

$f(t)=1-\mathrm{P}(t\le X\le t+6)$는
$t=m-3$에서 최솟값을 갖는
다음과 같은 개형을 갖는 것을 예상할 수 있다.
(관찰을 통한 그래프 그리기)



그러므로
$f(t_1)<f(t_2) \iff |m-3-t_1|<|m-3-t_2|$
이다. (필요 • 충분) ⋯ (ㄱ)

함수 $f(t)$는 최솟값 0.3174를 갖는다.
$\Rightarrow f(m-3)=0.3174$
$f(m-3)=1-\mathrm{P}(m-3\le X\le m+3)=0.3174$
$\mathrm{P}(m-3\le X\le m+3)=0.6826$
$\mathrm{P}(m\le X\le m+3)=0.3413$
$\Rightarrow \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{3}{\sigma}\right)=0.3413 \Rightarrow \sigma=3$

한편, $f(10)\le f(12)\le 0.5228$
$0.3413<0.5228<1$이므로
$f(k)=0.5228$을 만족시키는 k가 존재한다.
그것을 찾아보자.
$f(k)=1-\mathrm{P}(k\le X\le m+6)=0.5228$
$\mathrm{P}(k\le X\le k+6)=0.4772$
$\Rightarrow \mathrm{P}(k\le X\le k+2\sigma)=0.4772$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\dfrac{k-m}{\sigma}\le Z\le \dfrac{k-m}{\sigma}+2\right)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
조건을 만족시키는 $k=m-6$ 또는 m

$f(10)\le f(12)\le f(m)$에서 (ㄱ)에 의해
$\Rightarrow |m-3-10|\le |m-3-12|\le |m-3-m|$
$|m-3-10|\le |m-3-12| \Rightarrow m\le 14$
$|m-3-12|\le 3 \Rightarrow 12\le m\le 18$

그러므로 $12\le m\le 14$이다.

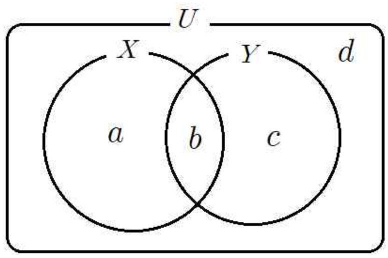
29. ⅰ) 치역의 원소가 1개일 경우: ${}_8\mathrm{C}_1$

ⅱ) 치역의 원소가 2개일 경우
치역이 될 원소 2개를 선택: ${}_8\mathrm{C}_2-7=21$
정의역 3개와 치역 2개를 대응: $2^3-2=6$
$21\times 6=126$

ⅲ) 치역의 원소가 3개일 경우
치역이 될 원소 3개를 선택: ${}_4\mathrm{H}_3=20$
정의역 3개와 치역 3개를 대응: $3\ne 6$
$20\times 6=120$

$8+126+120=254$

30.



전체경우의 수 (6^4)를 사건 U라 하고 네 수의 곱이 3의 배수인 사건을 X, 5의 배수인 사건을 Y라 하여 그림 상에 나타내자.
그리고 각 사건의 해당하는 경우의 수를 $a,\ b,\ c,\ d$로 나타내자.
예를 들어 $a+b+c+d=6^4$이고,
$a+d=5^4$ (5의 배수가 아닌 경우의 수) 이다.

구하고자 하는 확률 $\dfrac{a}{a+b}$를 어떻게 구할 수 있을까?

$c+d=4^4$이다. (주사위 눈이 1, 2, 4, 5만 가능하므로)
$$\begin{aligned}a+b&=6^4-4^4\\&=(6^2+4^2)(6^2-4^2)\\&=1040\end{aligned}$$
$d=3^4$이다. (주사위 눈이 1, 2, 4만 가능하므로)
$a+d=5^4$이므로 $a=5^4-3^4$
$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b}&=\frac{544}{1040}\\&=\frac{34}{65}\end{aligned}$$
$65+34=99$

미적분 해설

23. 생략

24. x의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 생각한다.

(1) $|x|<1$인 경우
$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}+x^2+4x}{x^n+x+1}=\dfrac{x^2+4x}{x+1}$
이고 주어진 방정식은
$\dfrac{x^2+4x}{x+1}=3x-2$
$\Rightarrow x^2+4x=3x^2+x-2$
$\Rightarrow 2x^2-3x-2=0,\ (2x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ ($\because |x|<1$)

(2) $|x|>1$인 경우
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x^2+4x}{x^n+x+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{1}{x^{n-2}}+\dfrac{4}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{n-1}}+\dfrac{1}{x^n}}=x^2$$
이므로 주어진 방정식은
$x^2=3x-2$
$\Rightarrow x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=2$ ($\because |x|>1$)

(3) $x=1$인 경우
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}+x^2+4x}{x^n+x+1}=\dfrac{1+1+4}{1+1+1}=2,$
$3x-2=3\times 1-2=1$
이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.
(1)~(3)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은
$-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$

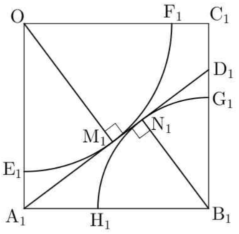
25. $f'(x)$가 우함수 이므로 $f(x)$는 $(0,\ f(0))$에 점대칭인 함수이다.
극댓값과 극솟값의 합이 2 이므로 $f(0)=1$임을 알 수 있고,

$f(x)=x^3-\sin(\pi x)+C$ 에서 $C=1$을 얻는다

$f(x)=x^3-\sin(\pi x)+1$ 이므로 $f(3)=28$

26. 그림과 같이 그림 R_1에서 호 $\mathrm{E_1F_1}$과 호 $\mathrm{G_1H_1}$이 선분 $\mathrm{A_1D_1}$과 각각 만나는 점을 $\mathrm{M_1}$,

N_1이라 하자.



문제의 조건에서

$\overline{B_1C_1} : \overline{B_1D_1} = 4:3$이고 $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}$이므로

$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1D_1} = 4:3$이고,

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1D_1} : \overline{A_1D_1} = 4:3:5$이다.

$\angle D_1A_1B_1$이 공통각이므로

$$\triangle A_1B_1D_1 \backsim \triangle A_1N_1B_1 \text{ (AA 닮음)}$$

에서

$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1N_1} = \overline{A_1D_1} : \overline{B_1D_1} = 5:3$

이고 $\overline{A_1B_1} = 2$이므로

$$\overline{B_1N_1} = \frac{3}{5}\overline{A_1B_1} = \frac{6}{5}$$

이다.

같은 방법으로 $\angle D_1A_1B_1 = \angle M_1OA_1$이므로

$$\triangle A_1B_1D_1 \backsim \triangle OM_1A_1 \text{ (AA 닮음)}$$

이고,

$$\overline{OM_1} = \frac{4}{5}\overline{OA_1} = \frac{8}{5}$$

이다.

따라서 부채꼴 OE_1F_1의 넓이는

$$\frac{1}{4}\times\pi\times\left(\overline{OM_1}\right)^2 = \frac{16}{25}\pi$$

부채꼴 $B_1G_1H_1$의 넓이는

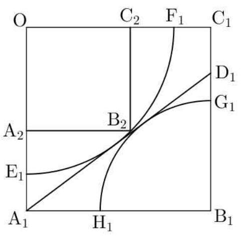
$$\frac{1}{4}\times\pi\times\left(\overline{B_1N_1}\right)^2 = \frac{9}{25}\pi$$

이므로

$$S_1 = 4 - \frac{16}{25}\pi - \frac{9}{25}\pi = 4-\pi \quad \cdots (*)$$

이다.

한편, 그림 R_2에서



$\overline{OB_2} = \overline{OM_1} = \frac{8}{5}$이므로

$$\overline{OA_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OB_2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

이다. 따라서 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 (*)과 등비급수 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{4-\pi}{1-\frac{8}{25}} = \frac{25}{17}(4-\pi)$$

27. 임의의 실수 x에 대하여

$|f(x)-x| \geq 0$이므로

임의의 양수 x에 대하여

$$\int_0^x |f(t)-t|\,dt \geq 0$$

이다. 따라서 조건 (나)에서 임의의 양수 x에 대하여

$$\int_0^x |f(t)-t|\,dt = 0$$

이고, $f(x)-x=0\ (x>0)$이다.

$$\therefore f(x) = x \ (x>0)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} (ax+b)e^{-x} & (x \leq 0) \\ x & (x>0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\Rightarrow (a\cdot 0+b)e^{-0} = 0,\ b=0$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0-}\frac{axe^{-x}}{x} = 1,\ a=1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & (x \leq 0) \\ x & (x>0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^2 f(x)\,dx &= \int_{-1}^0 xe^{-x}\,dx + \int_0^2 x\,dx \\ &= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^0 + 2 \\ &= -1+2 = 1 \end{aligned}$$

28. 원주각의 성질에서

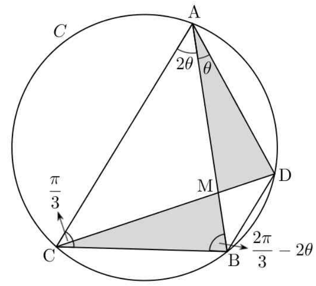
$\angle BCD = \angle BAD = \theta$이고,

사인법칙에서

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)} = 2 \Rightarrow \sin(\angle ACB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이고, $\angle ACB < \angle ADB$, $\angle ACB + \angle ADB = \pi$

이므로 $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADB = \frac{2\pi}{3}$이다.

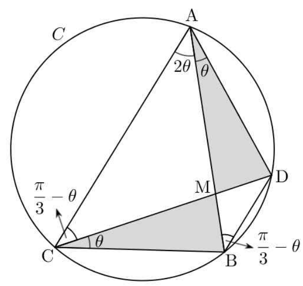


$\angle ABC = \frac{2\pi}{3} - 2\theta$이므로 삼각형 ABC에서

사인법칙에 의하여

$$\overline{AC} = 2\sin(\angle ABC) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)$$

이고,



$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = \frac{\pi}{3}-\theta$$

이고 원주각의 성질에서

$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{\pi}{3}-\theta$$

이므로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{AD} = 2\sin(\angle ABD) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \triangle ACD &= \frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin(\angle CAD) \\ &= \frac{1}{2}\times 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\times 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\times\sin 3\theta \\ &= 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin 3\theta \end{aligned}$$

… ①

이고,

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle CAB) \\ &= \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\times\sin 2\theta \\ &= \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\sin 2\theta \end{aligned}$$

… ②

$\angle AMC = \frac{2\pi}{3} - \theta$이므로 삼각형 AMC에서

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CM}}{\sin(\angle CAM)} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle AMC)}$$

$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{CM}}=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}\times\sin2\theta \qquad \cdots$$

③

①, ②에서

$f(\theta)-g(\theta)$

$=\triangle\mathrm{ACD}-\triangle\mathrm{ABC}$

$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\times\left\{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin3\theta-\sqrt{3}\sin2\theta\right\}$

이므로 ③에서

$$\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\overline{\mathrm{CM}}}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin3\theta-\sqrt{3}\sin2\theta}{\frac{2\sin2\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\times\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$$

이다.

$\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}=\frac{3}{2}$ 이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\overline{\mathrm{CM}}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\times\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3}{8}$$

29.

$f(x)=\theta$ **라 하면, 삼각형** ABE **에서**

$\angle\mathrm{ABE}=\frac{\pi}{6}-\theta$ **이므로 사인법칙에 의해**

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sin\theta}=\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$$

$$\Rightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=(1-x)\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=(1-x)\sin\theta$$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cos\theta=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)\sin\theta$ **를 얻는다.**

그러므로 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **일 때,**

$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{2}\cos\theta=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)\sin\theta$**의 양변을 미분하면**

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dx}=-\sin\theta+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)\cos\theta\frac{d\theta}{dx}$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ **를 대입**

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{d\theta}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{d\theta}{dx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\frac{d\theta}{dx}=\frac{2}{5}$ **를 얻는다.**

30.

직선 $y=m(x-e)+b$ 는 점 (e,b) 를 지나고, 기울기가 m 이다.

$f(e)=-a+\ln(2e^2)=-a+2+\ln2$ 인데,

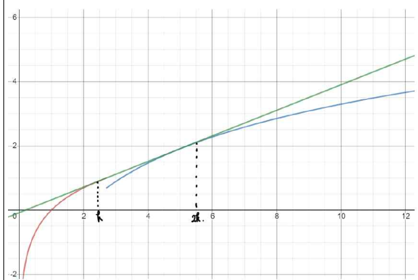
$a+b>2+\ln2$ 이므로 $b>f(e)$ 이다.

일반적으로, $g(m)$ 이 불연속인 지점은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=m(x-e)+b$ 접하는 상황에서의 m 이다.

그런데 $g(m)$ 이 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로,

$0<x<e$, $x>e$ 인 구간에서

직선 $y=m(x-e)+b$ 이 공통접선을 갖는다.



$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $\left(-a+\ln(2x^2)\right)'=\frac{2}{x}$ 이므로

접선의 기울기가

동일하기 위해서 접점의 x 좌표를 k, $2k$ 라 하자.

$\left(\frac{e}{2}<k<e\right)$

$(k,f(k))$ 에서 그은 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{k}x+\ln k-1$

$(2k,f(2k))$ 에서 그은 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{k}x+\ln8k^2-a-2$

두 접선이 동일하기 위해서는

$\ln k-1=\ln8k^2-a-2$

$\therefore\ a=\ln8k-1$

$\frac{e}{2}<k<e$ 에서

$2\ln2<\ln8k-1\,(=a)<3\ln2$ 이고,

$2<e<2\sqrt{2}$ 이므로 $a=2$ 이다. ($\because$ a 는 정수)

공통접선을 계산하면 $y=\frac{8}{e^3}x+2-\ln8$ 이고,

(e,b) 를 지나므로

$b=2+\frac{8}{e^2}-\ln8$ 이다. $p=2$, $q=8$, $r=8$

$\therefore\ p+q+r=18$