제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 모의평가 문제지

수학 영역 (B형)

성명	

수험 번호						—				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

뿌리 깊은 나무는 난이도에 흔들리지 않는다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형의 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오.
○ 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

1. $f(x)=(x-1)^2(x-2)$일 때, $f'(2)$의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

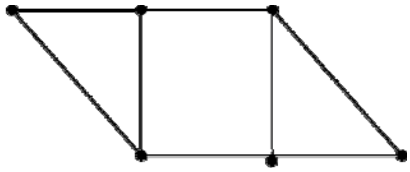
2. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_4=14,\ a_3+a_5=42$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비의 곱은? [2점]

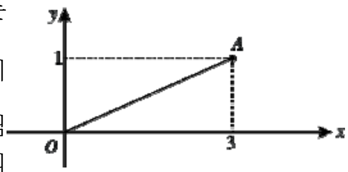
① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ 2
④ $\frac{13}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

3. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬에서 행의 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는? [2점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$이라고 하자. 오른쪽 그림의 선분 OA를 f에 의하여 옮긴 선분을 OB라 할 때, 삼각형 AOB의 넓이는? [3점]



① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ 8

5. 5 개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2 를 사용하여 자연수를 만들려고 한다. 이들 5 개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수를 a, 이 중 4 개의 숫자만을 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

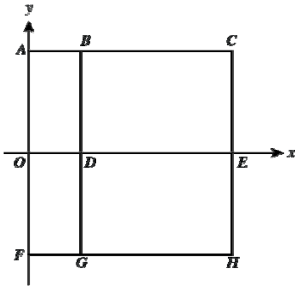
6. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$
> (나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$

부등식 $f(x)\le 0$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 5 일 때, $f(-1)$ 의 최솟값을 구하시오. [3점]

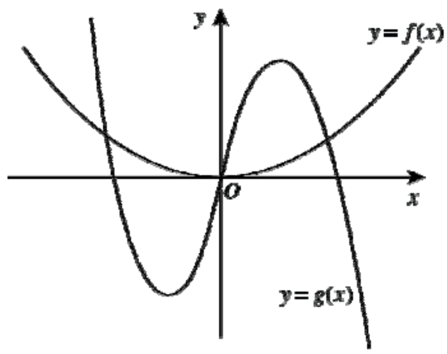
① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

7. 오른쪽 그림에서 직사각형 AODB와 OFGD는 합동이고, 직사각형 BDEC와 DGHE도 합동이다. 어떤 일차변환이 점 B를 점 E로, 점 D를 점 A로 옮길 때, 점 A가 옮겨지는 점은? [3점]



① B ② C
③ F ④ G ⑤ H

8. y축에 대칭인 이차함수 $y=f(x)$와 원점에 대칭인 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 원점 O와 두 점에서 만날 때, 집합 $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{\{f(x)\}^2}-\frac{1}{\{g(x)\}^2}=0\right\}$ 의 원소의 개수는? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

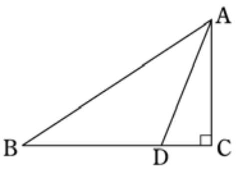
9. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$과 이차정사각행렬 B에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.) [3점]

<보기>

ㄱ. $k=0$일 때, A^{-1}이 존재한다.
ㄴ. $k=1$일 때, $AB=O$이면 $B=O$이다.
ㄷ. $k=4$일 때, $AB=O$을 만족하는 영행렬이 아닌 행렬 B가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 그림과 같이 C가 직각인 직각삼각형 ABC에서 변 BC의 4등분점을 잡아 꼭짓점 C에 가까운 점을 D라 하면 삼각형 ABD가 이등변삼각형이 된다. 이때, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 다음은 타원의 어느 성질을 증명하는 과정이다.

[증명]

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 기울기가 m, $-\frac{1}{m}$인 접선의 방정식은 각각

$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$ ⋯ ㉠

$y=-\frac{1}{m}x\pm\sqrt{\frac{1}{m^2}a^2-b^2}$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서 $(y-mx)^2=m^2a^2-b^2$

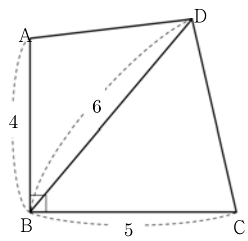
$(my+x)^2=m^2\left(\frac{1}{m^2}a^2-b^2\right)$

$\therefore\ (m^2+1)(x^2+y^2)=(m^2+1)(a^2+b^2)$

위의 성질을 이용하여 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$에 외접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

12. 그림과 같이 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{BD}}=6$인 사각형 ABCD이 있다. 사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이의 곱은? [4점]



① 100 ② 121 ③ 144
④ 169 ⑤ 196

13. 다음은 a, b가 서로 다른 양의 실수일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n+b^n}{2}$이 성립함을 증명하는 과정이다.

[증명]

(ⅰ) $n=2$일 때,

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2} = -\frac{(a-b)^2}{4} < 0$

∴ 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k < \frac{a^k+b^k}{2}$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 곱하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} < \frac{a^k+b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$

$= \frac{1}{4}(a^{k+1}+b^{k+1}+a^k b+ab^k)$

한편, $(a^k b+b^k a)$ $\boxed{\text{(나)}}$ $(a^{k+1}+b^{k+1})$이므로

$\frac{1}{4}(a^{k+1}+b^{k+1}+a^k b+ab^k) < \boxed{\text{(다)}}$

$\therefore \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} < \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

따라서, $n=k+1$일 때도 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

① $\frac{a+b}{2}$, $<$, $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

② $\frac{a-b}{2}$, $<$, $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

③ $a+b$, $>$, $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

④ $\frac{a+b}{2}$, $>$, $\frac{a^k+b^k}{2}$

⑤ $\frac{a+b}{2}$, $>$, $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

[14~15] 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{7}{6}$이 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자.
14번과 15번의 물음에 답하시오.

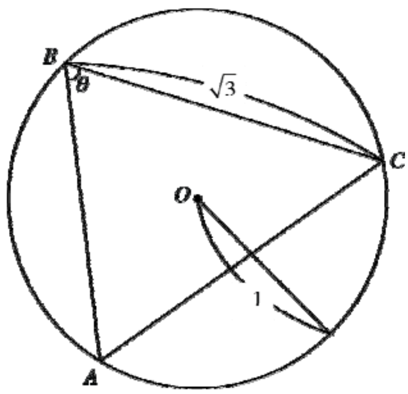
14. 곡선 C 위의 점 (x, y)에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

15. 곡선 C와 점 $(1, 2)$에서 접하는 원 $(x-a)^2+y^2=r^2$에 대하여 r^2의 값은? [3점]

① $\frac{15}{4}$ ② 4 ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

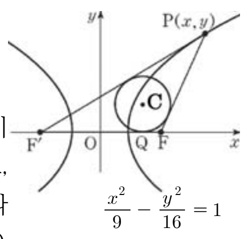
16. 외접원의 반지름의 길이가 1인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BC}=\sqrt{3}$, $\angle ABC=\theta$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$라 하자.



$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{12}}\frac{f(\theta)-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\theta-\frac{\pi}{12}}$의 값은? (단 $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

17. 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위에 한 동점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ (단, $x>0$)를 잡는다. 이 쌍곡선의 두 초점을 F, F'라 하고, 삼각형 PFF'에 내접하는 원을 C라 한다. 원 C가 x축과 접하는 점을 Q라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



<보기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=6$이다.
ㄴ. 점 P의 위치에 관계없이 선분 FQ의 길이는 일정하다.
ㄷ. 선분 PF가 x축에 수직일 때, 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 넓이는 $\frac{80}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 좌표공간에서 점 $\mathrm{P}\,(x,\ 1+\sin x,\ 0)$과 $\mathrm{Q}\,(x,\ 0,\ 2\cos^2 x)$를 맺는 직선이 이루는 곡면을 S라 하자. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, 곡면 S와 세 좌표평면으로 둘러싸인 입체의 부피를 구하면? [4점]

① $\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{3}$ ② $\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{3}$ ③ 1
④ $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

19. $y=\sin x+kx$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 $45°$만큼 회전시킨 곡선이 실수전체에서 정의된 어떤 함수가 될 수 있게 하는 상수 k의 범위는? [4점]

① $k\ge 1$ ② $k\ge 2$
③ $0\le k\le 2$ ④ $k\le 1$ 또는 $k\ge 2$
⑤ $k\le 0$ 또는 $k\ge 2$

20. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n$으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

21. 실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보기>

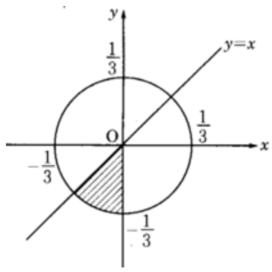
ㄱ. $y=f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $y=f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $y=f'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형(22 ~ 30)

22. $3^{a+b}=8$, $2^{a-b}=5$일 때 $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. [3점]

23. n이 자연수일 때, 행렬 $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$로 나타나는 일차변환에 의하여 점 P_n이 점 P_{n+1}로 옮겨진다. 점 P_1의 좌표가 $P(4,\ 4\sqrt{3})$일 때, 다음 그림에서 원의 빗금친 부분의 둘레 또는 내부에 점 P_n이 속하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [3점]



24. 두 집합 A, B를 각각 $A=\{x \mid x^2+ax+b<0\}$, $B=\{x \mid x^3-x^2-2x \geq 0\}$이라 할 때,

$$A\cap B=\left\{x \;\middle|\; \frac{x(x-2)}{(x-3)(x+1)} \leq 0\right\},$$

$$A\cup B=\{x \mid x+1 \geq 0\}$$

이 되는 상수 a, b에 대하여 $a\times b$의 값을 구하시오. [3점]

25. 직선 $y=\dfrac{100}{n}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 4θ라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta$의 값을 구하시오. [3점]

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}-2n\right)=a$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a(4^{n+1}+3^n+2)}{4^n+3^n}$의 극한값을 구하시오. [4점]

27. 네 자리 자연수 $abcd$의 각 자릿수 a, b, c, d는 다음 두 조건을 만족시킨다.

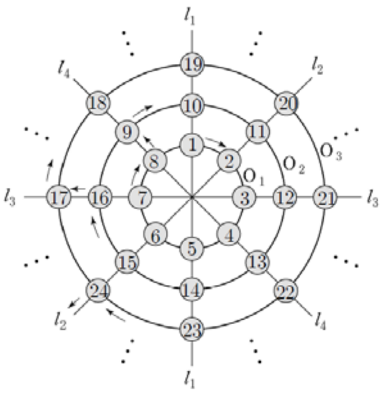
[조건]

(가) 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여
$a\in A$, $b\in A$, $c\in A$, $d\in A$

(나) $a \leq b \leq c \leq d$

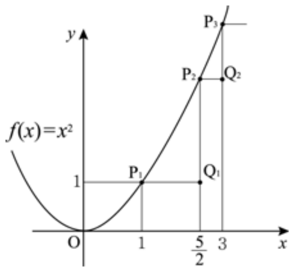
네 자리 자연수 $abcd$가 짝수인 것의 개수를 구하시오. [4점]

28. 다음 그림은 동심원 O_1, O_2, O_3, $\cdots$과 직선 l_1, l_2, l_3, l_4의 교점 위에 자연수를 1부터 차례로 적은 것이다.



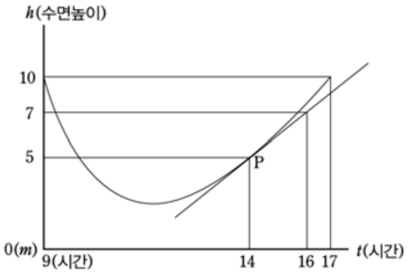
이미 채워진 수들의 규칙에 따라 계속하여 적어 나갈 때 직선 l_4 위에 적히는 수 중 작은 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$라 하면, 적힌 수 중 $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_3 = 9$이다. 이때, a_{35}를 구하시오. [4점]

29. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 3$, $\cdots$, $x_n = \frac{4n-3}{n}$, $\cdots$ 에 대하여 좌표평면 위에 점 $P_1(1, 1)$과 $P_n(x_n, {x_n}^2)$, $Q_n(x_{n+1}, {x_n}^2)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 그림과 같이 나타낸다.



무한급수 $\overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1P_2} + \overline{P_2Q_2} + \overline{Q_2P_3} + \overline{P_3Q_3} + \cdots$ 의 값을 구하시오. [3점]

30. 다음은 어떤 공장에서 공업용 수돗물의 사용량을 조사한 자료이다. 반지름이 2인 원기둥 모양의 물탱크에 매 시간당 $100\mathrm{m}^3$의 물을 넣었다고 한다. 아래 그래프는 아침 9시부터 오후 5시까지 작업시간 동안 물탱크 속의 물의 높이 $h(m)$의 시간 t(시)에 따른 변화를 나타내고 있다.



14시(즉 오후 2시)에 물탱크에서 빠져나가는 물의 부피의 시간에 대한 변화율은 $a+b\pi(m^3/\text{시})$이다. 유리수 a, b에 대해 $a+b$의 값을 구하시오. (단, 그림에서 곡선은 미분가능이고, 직선은 점 P에서의 접선이다.) [4점]

실전모의고사 (B형) 3회- 정답 및 해설

1	2	3	4	5
④	②	④	④	③
6	7	8	9	10
⑤	⑤	④	⑤	⑤
11	12	13	14	15
②	③	①	②	③
16	17	18	19	20
③	⑤	⑤	⑤	④
21	22	23	24	25
③	125	10	6	25
26	27	28	29	30
6	24	137	18	96

1) **정답** ④

풀이

$f'(x)=2(x-1)(x-2)+(x-1)^2$

$f'(2)=1$

2) **정답** ②

풀이

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=ar(1+r^2)=14$ …㉠

$a_3+a_5=ar^2(1+r^2)=42$ …㉡

㉡÷㉠에서

$r=3,\ a=\dfrac{7}{15}$ $\qquad \therefore ar=\dfrac{7}{5}$

3) **정답** ④

풀이

행의 성분의 합은 각 행에 해당하는 꼭짓점에 연결된 변의 수와 같다. 그래프에서 각 꼭짓점에 연결된 변의 수가 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2이므로 행의 성분의 합이 3인 행의 개수는 4이다.

4) **정답** ④

풀이

일차변환 f를 나타내는 행렬은

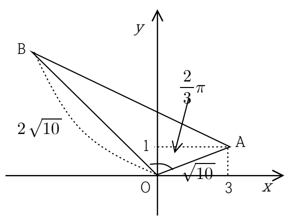
$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$이므로 f는 원점을

중심으로 $\dfrac{2}{3}\pi$만큼 회전한 다음

2배 확대하는 회전변환과 닮음변환의 합성변환이다. 이때,

$\overline{OA}=\sqrt{10}$

$\overline{OB}=2\sqrt{10}$



$\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi$

이므로 $\triangle AOB$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{10}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=5\sqrt{3}$

5) **정답** ③

풀이

(i) 5 개의 숫자를 모두 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우 : 같은 것이 3개, 2 개씩 있을 때, 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$

$\therefore\ a=10$

(ii) 4 개의 숫자만을 사용하여 네 자리의 자연수를 만드는 경우 :

① $(1,\ 1,\ 1,\ 2)$인 경우 : $\dfrac{4!}{3!}=4$

② $(1,\ 1,\ 2,\ 2)$ 인 경우 : $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

$\therefore\ b=10$

(i), (ii)에 의하여 $a+b=20$

6) **정답** ⑤

풀이

조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(x)=ax^3+bx\ (a\neq0)$이라 놓으면

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x^2}\right)$$
$$=a=1$$

$f(x)=x^3+bx$이고 부등식 $f(x)\leq0$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 5 이므로

$$f(x)\leq0 \Leftrightarrow x^3+bx\leq0$$
$$\Leftrightarrow x(x+\sqrt{-b})(x-\sqrt{-b})\leq0$$

즉, $0\leq x\leq\sqrt{-b}$를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 5 이므로

$$5\leq\sqrt{-b}<6,\ 25\leq-b<36$$

이때 $f(-1)=-1-b$이므로

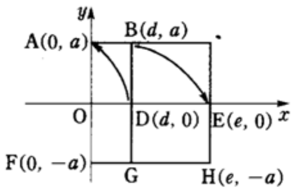
$$24\leq-1-b<35$$

따라서 구하는 $f(-1)$ 의 최솟값은 24이다.

7) **정답** ⑤

풀이

좌표를 그림과 같이 정하면



준 일차변환의 행렬을 P라 하면

$$P\begin{pmatrix} d & d \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & d \\ a & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -d \\ -a & d \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & -de \\ -a^2 & ad \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & de \\ a^2 & -ad \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & de \\ a^2 & -ad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} ade \\ -a^2d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e \\ -a \end{pmatrix}$$

따라서 H이다.

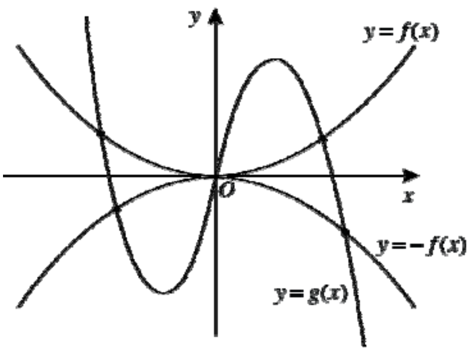
8) **정답** ④

풀이

$$\frac{1}{\{f(x)\}^2}-\frac{1}{\{g(x)\}^2}=0$$

$\Leftrightarrow \{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2,\ f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=-g(x),\ f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0$



이때 주어진 방정식의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 두 함수 $y=-f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. (단, $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$)

따라서 구하는 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

9) **정답** ⑤

풀이

ㄱ. $k=0$일 때, $D=16\neq 0$이므로 A^{-1}이 존재한다. (참)

ㄴ. $k=1$일 때, A^{-1}이 존재하므로

$AB=O$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=O$이다. (참)

ㄷ. 두 실수 s, t에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2s & 2t \\ -s & -t \end{pmatrix}$일 때, $AB=O$이므로 영행렬이 아닌 행렬 B가 존재한다.

(단, $s\neq 0$ 또는 $t\neq 0$이다.) (참)

10) **정답** ⑤

풀이

$\angle\mathrm{ABD}=\theta$로 두면,

$\angle\mathrm{BAD}=\theta$, $\angle\mathrm{ADC}=2\theta$이다.

그리고 $\overline{\mathrm{BC}}=4$로 두면

$\overline{\mathrm{BD}}=3=\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{DC}}=1$이다.

$\triangle\mathrm{ADC}$에서

$$\cos 2\theta=\frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{1}{3}$$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1}{3}$에서

$$\cos^2\theta=\frac{2}{3}$$

$$\sec^2\theta=\frac{3}{2}$$

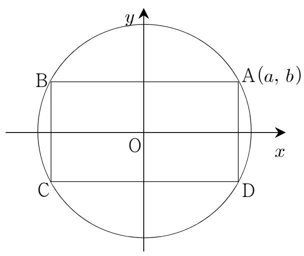
$$1+\tan^2\theta=\frac{3}{2},\ \tan^2\theta=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because$ θ는 예각)

11) **정답** ②

풀이

타원에 외접하는 직사각형을 ABCD라 하면 변 AB와 AD는 점 A에서 타원에 그은 접선 위에 존재하고 서로 수직이다. 따라서 점 A는 증명의 내용에 의해 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이다. 마찬가지로 정사각형의 다른 꼭짓점 B, C, D도 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이 된다.



즉, 직사각형 ABCD는 원 $x^2+y^2=5$에 내접하는 직사각형

이 된다. 그림에서 점 A(a, b)라 하면 $a^2+b^2=5$이고 직사각형의 넓이는 $4ab$이다.

$a^2+b^2=5 \geq 2ab$이므로 $4ab$의 최댓값은 10이다.

12) **정답** ③

풀이

$\angle \mathrm{ABD} = \theta$라 하면 $\angle \mathrm{DBC} = \frac{\pi}{2}-\theta$이다.

$$\begin{aligned}\square \mathrm{ABCD} &= \triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{BCD} \\ &= 12\sin\theta + 15\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ &= 12\sin\theta + 15\cos\theta \\ &= 3\sqrt{41}\sin(\theta+\alpha),\ \tan\alpha = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $3\sqrt{41}$을 갖는다.

$\theta = \frac{\pi}{2}-\alpha$에서 $\sin\theta = \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$이므로

$\triangle \mathrm{ABD} = 12\sin\theta = \frac{48}{\sqrt{41}}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이의 곱은 $3\sqrt{41} \times \frac{48}{\sqrt{41}} = 144$

13) **정답** ①

풀이

$n=k$일 때, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k < \frac{a^k+b^k}{2}$이 성립한다고 가정하고 양변에 $\boxed{\frac{a+b}{2}}$를 곱하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} < \frac{a^k+b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$

한편, $(a^kb+b^ka)-(a^{k+1}+b^{k+1})$
$=-(a^k-b^k)(a-b)$

여기서 $a>b$이면 $a^k>b^k$이고, $a<b$이면 $a^k<b^k$

$\therefore\ -(a^k-b^k)(a-b)<0$

따라서 $(a^kb+b^ka)\ \boxed{<}\ (a^{k+1}+b^{k+1})$이므로

$\frac{1}{4}(a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k) < \frac{1}{4}(2a^{k+1}+2b^{k+1})$
$=\boxed{\frac{1}{2}(a^{k+1}+b^{k+1})}$

14) **정답** ②

풀이

구하려고 하는 부분의 넓이는

(선분 OB와 포물선으로 둘러싸인 도형)
$-$(선분 OA와 포물선으로 둘러싸인 도형)

이므로 $\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3$이다. ($\because$ 포물선과 이차곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $\frac{1}{6}|a|(\beta-\alpha)^3$)

이 값이 $\frac{7}{6}$이므로 $(s,\ t)$가 그리는 도형 C의 방정식은 $y^3-x^3=7$이다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+7}}{x} = 1$

15) **정답** ③

풀이

$C:\ y^3-x^3=7$

$3y^2y'-3x^2=0$에서 $y'=\frac{x^2}{y^2}$이므로

점 $(1,\ 2)$에서 접선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 점 $(1,\ 2)$에서 곡선 C에 대한 법선의 방정식은 $y=-4(x-1)+2$이다.

이 직선이 원의 중심 $(a,\ 0)$을 지나므로 $a=\frac{3}{2}$

접점 $(1,\ 2)$와 중심 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ 사이의 거리가 r이므로

$r^2=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

16) **정답** ③

풀이

변 BC 의 중점을 M 이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{BM}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\cos(\angle \mathrm{OBM}) = \frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \angle \mathrm{OBC} = \angle \mathrm{OBM} = \frac{\pi}{6}$

또한, 이등변삼각형 OBC 에서

$\angle \mathrm{OCB} = \angle \mathrm{OBC} = \frac{\pi}{6}$이므로

$\angle \mathrm{BOC} = \pi - \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi$

따라서 $\angle \mathrm{AOB} + \angle \mathrm{BOC} + \angle \mathrm{AOC} = 2\pi$에서

$\angle \mathrm{AOB} = 2\pi - \angle \mathrm{BOC} - \angle \mathrm{AOC} = \frac{4}{3}\pi - 2\theta$

$f(\theta) = \triangle \mathrm{OBC} + \triangle \mathrm{OCA} + \triangle \mathrm{OAB}$
$= \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\sin(\angle \mathrm{AOC}) + \frac{1}{2}\sin(\angle \mathrm{AOB})$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4}{3}\pi - 2\theta\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \lim_{\theta \to \frac{\pi}{12}} \frac{f(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\theta - \frac{\pi}{12}}$$
$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{12}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{\theta - \frac{\pi}{12}}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t}{t} \quad \left(\because \ \theta - \frac{\pi}{12} = t\right)$$
$$= \sqrt{3}$$

17) **정답** ⑤

풀이

ㄱ. 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$ (참)

ㄴ. 원 C가 변 PF, PF'과 접하는 점을 각각 A, B라 하면, 원의 접선의 성질에 의해

$\overline{PA} = \overline{PB} = a$, $\overline{F'B} = \overline{F'Q} = b$,

$\overline{FA} = \overline{FQ} = c$ 라 하면,

$\overline{PF'} - \overline{PF} = (a+b) - (a+c) = b - c = 6 \quad \cdots$ ㉠

$\overline{QF'} + \overline{QF} = b + c = 10 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$b = 8$, $c = 2$ (참)

ㄷ. 선분 PF가 x축에 수직일 때, 피타고라스 정리에 의해서

$$(a+8)^2 = (a+2)^2 + 10^2$$
$$\therefore \ a = \frac{10}{3}$$

따라서 선분 PF가 x축에 수직일 때,

삼각형 $PF'F$의 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 10,

$2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$이 되어 삼각형 $PF'F$의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{16}{3} = \frac{80}{3}$ (참)

이상에서 참인 것은 ㄱ. ㄴ, ㄷ 이다.

18) **정답** ⑤

풀이

이 입체도형의 부피를 x축으로 적분하여 구하기로 하자.

x축에 수직으로 자른 단면은 밑변의 길이가 $1 + \sin x$이고, 높이가 $2\cos^2 x$인 직각삼각형이 나온다. 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x)(2\cos^2 x) = (1 + \sin x) \cdot \cos^2 x$$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 범위에서 $S(x)$를 적분하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)\cos^2 x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin x \cos^2 x) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$$

여기에서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$이고

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x \, dx$는 $\cos x = t$, $-\sin x \, dx = dt$로 치환하여 계산하면 $\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ $\quad \therefore \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$

19) **정답** ⑤

풀이

$y = \sin x + kx$를 회전시킨 곡선을 $y = f(x)$라 하면 $f(x)$가 함수가 된다는 것은 $y = f(x)$의 그래프와 임의의 y축에 평행한 직선이 한 번만 만난다는 뜻이다.

$\Leftrightarrow y = \sin x + kx$와 임의의 기울기가 1인 직선 $y = x + a$가 한 번만 만난다.

$\Leftrightarrow$ $\sin x + kx = x + a$가 임의의 상수 a에 대해 실근이 하나다.

$\Leftrightarrow$ $\sin x + (k-1)x = a$가 임의의 상수 a에 대해 실근이 하나다.

$\Leftrightarrow$ $y = \sin x + (k-1)x$가 일대일함수이다.

따라서 $g(x) = \sin x + (k-1)x$라 하면 극값이 없어야 하므로 $g'(x) = \cos x + (k-1)$에서 항상 $g'(x) \ge 0$이거나 $g'(x) \le 0$이다.

즉 $g'(x)$의 최솟값이 $k-2$, 최댓값이 k이므로

$k-2 \ge 0$또는 $k \le 0$이다.

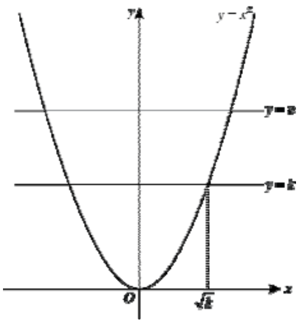
20) **정답** ④

풀이

$y = x^2$과 $y = k$에서 $x = \pm\sqrt{k}$이므로 영역에 있고 $y = k$인

점의 개수를 a_n이라 하면 $a_n = 2[\sqrt{k}]+1$이므로

$2\sqrt{k}-1 < a_n \le 2\sqrt{k}+1$



$$\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}-1) < S_n \le \sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}+1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}-1)\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}+1)\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}1\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=0$이고

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{k}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}$$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}$$

21) **정답** ③

풀이

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x) = \lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$ 이므로 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $x \ne 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right)$의 값이 존재하지 않으므로 $\lim_{x\to 0}f'(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 $f'(x)$는 불연속이다. (거짓)

22) **정답** 125

풀이

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= \log_3 8\,\log_2 5\\ &= 3\log_3 2\,\log_2 5\\ &= 3\log_3 5\\ &= \log_3 5^3\end{aligned}$$

$\therefore 3^{a^2-b^2} = 5^3$

23) **정답** 10

풀이

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}$$

즉, 일차변환 f는 원점을 중심으로 하는 60° 회전변환과 $\frac{1}{2}$배 닮음변환의 합성변환이다.

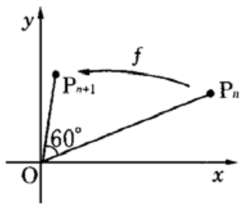
$\overline{OP_1} = \sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2} = 8$

$\angle P_1Ox = 60^\circ$

$\therefore \overline{OP_n} = \overline{OP_1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2^{4-n} \le \frac{1}{3}$ $\quad\therefore n \ge 6$...①



또, 반직선 OP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는

60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°, 60°,...

점 P_n이 주어진 영역에 속하려면 n은 6으로 나눈 나머지가 4인 자연수이다....②

따라서 ①, ②을 동시에 만족하는 자연수 n의 최솟값은 10이다.

24) **정답** 6

풀이

먼저 $x^3-x^2-2x \ge 0$을 계산하면

$B=\{x|-1 \le x \le 0,\ 2 \le x\}$이다.

$\frac{x(x-2)}{(x-3)(x+1)} \le 0$의 양변에 $(x-3)^2(x+1)^2$를 곱하면

$x(x-2)(x-3)(x+1) \le 0$, $x \ne 3, -1$이므로

$A \cap B = \{x \mid -1 < x \le 0, 2 \le x < 3\}$

여기에서 $x^2 + ax + b = 0$의 해는 등호가 빠진 -1과 3이다.

따라서 근과 계수를 이용하면

$a = -2, b = -3 \quad \therefore ab = 6$

25) **정답** 25

풀이

$\tan 4\theta = \dfrac{100}{n}$이므로 $n = \dfrac{100}{\tan 4\theta}$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} n\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100}{\tan 4\theta} \cdot \theta = 25$

26) **정답** 6

풀이

$a = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+2n} - 2n)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} + \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right\}$

$= \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(4^{n+1}+3^n+2)}{4^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a\left\{4+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\dfrac{2}{4^n}\right\}}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$

$= 4a = 4 \times \dfrac{3}{2} = 6$

27) **정답** 24

풀이

네 자리 자연수 중에서 짝수인 경우는 d의 값이 2 또는 4일 때이다.

ⅰ) $d = 2$인 경우

1과 2 중에서 a, b, c가 될 값 3개를 중복해서 택하면 되므로 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$

ⅱ) $d = 4$인 경우

1, 2, 3, 4 중에서 a, b, c가 될 값 3개를 중복해서 택하면 되므로 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

따라서 구하는 개수는 24개이다

28) **정답** 137

풀이

$(a_1,\ a_2)$는 O_1 위, $(a_3,\ a_4)$는 O_2 위이므로 따라서, $(a_{35},\ a_{36})$은 O_{18} 위에 있다. O_{18}은 $8\times17+1$부터 8×18까지의 수가 있다. 그리고 각 원은 차례로 직선 $l_1,\ l_4,\ l_3,\ l_2,\ l_1, \cdots$에서 시작하므로 O_{18}은 O_2와 같은 l_4에서 시작한다. 따라서 a_{35}는 O_{18} 위의 첫 번째 수인 $8\times17+1=137$이다.

29) **정답** 18

풀이

$\overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1P_2} + \overline{P_2Q_2} + \overline{Q_2P_3} + \overline{P_3Q_3} + \cdots$

$= (x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))$

$\quad + (x_3 - x_2) + (f(x_3) - f(x_2)) + \cdots$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k) + \sum\limits_{k=1}^{n}(f(x_{k+1})-f(x_k))\right\}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\{x_{n+1} - x_1 + f(x_{n+1}) - f(x_1)\}$

$= 4 - 1 + f(4) - f(1)$

$= 3 + 15$

$= 18$

30) **정답** 96

풀이

아침 9시에 탱크에 있던 물의 부피는 $40\pi(m^3)$이었고 한 시간마다 $100(m^3)$의 물을 넣고 있으므로 아침 9시로부터 t(시)만큼 지났을 때, 탱크에 남아 있는 물의 부피를 V, 사용된 물(빠져나가는 물)의 부피를 V_1이라 하면

$V + V_1 = 40\pi + 100t$로 나타내어진다.

시간이 t일 때 빠져나가는 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV_1}{dt} = 100 - \dfrac{dV}{dt}$ ……… ㉠

물탱크에 남아있는 물의 양은 $V = \pi \cdot 2^2 \cdot h = 4\pi h$이므로

$\dfrac{dV}{dt} = 4\pi \cdot \dfrac{dh}{dt}$ ……㉡

그래프에서 14시(즉 $t=5$)일 때, 시간에 따른 물의 높이의 변화율은 접선의 기울기와 같으므로

$\left[\dfrac{dh}{dt}\right]_{(t=5)} = 1,\quad \left[\dfrac{dV}{dt}\right]_{(t=5)} = 4\pi \cdot 1 = 4\pi$

그러므로 그 때 빠져나가는 물의 부피의 변화율은

$\therefore \left[\dfrac{dV_1}{dt}\right]_{(t=5)} = 100 - 4\pi\,(m^3/\text{시}) \quad \therefore a = 100,\ b = -4$