2023_Final

단권화_공통과목

이대은

1. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [3월 13번][4점]

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

2. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

> (가) 점 A는 곡선 $y = \log_2(x+2) + k$ 위의 점이다.
> (나) 점 A를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y = 4^{x+k} + 2$ 위에 있다.

$a \times b$의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$) [3월 21번][4점]

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \le n \le 4$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+4} = 15$이다.
(나) $n \ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = n$이다.

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$일 때, a_5의 값은? [4점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

4. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오. [4월 21번][4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ne 0$이다.
(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다.

5. 자연수 k에 대하여다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n\le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [6월 15번][4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [9월 11번][4점]

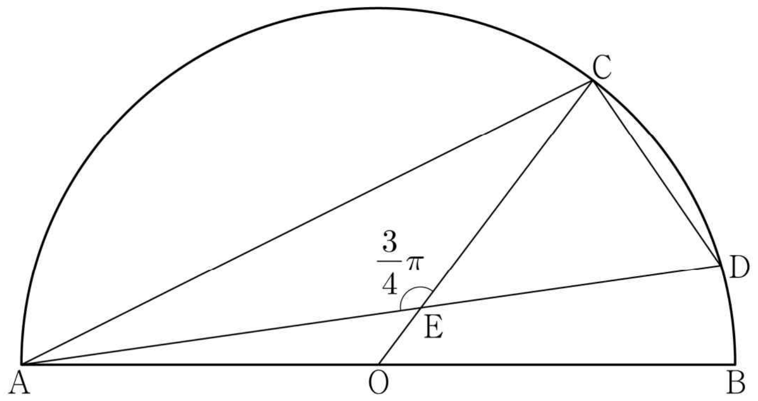
> $\sqrt{3}^{\,f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [9월 13번][4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

8. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\ge 5)\end{cases}$$ 이다.

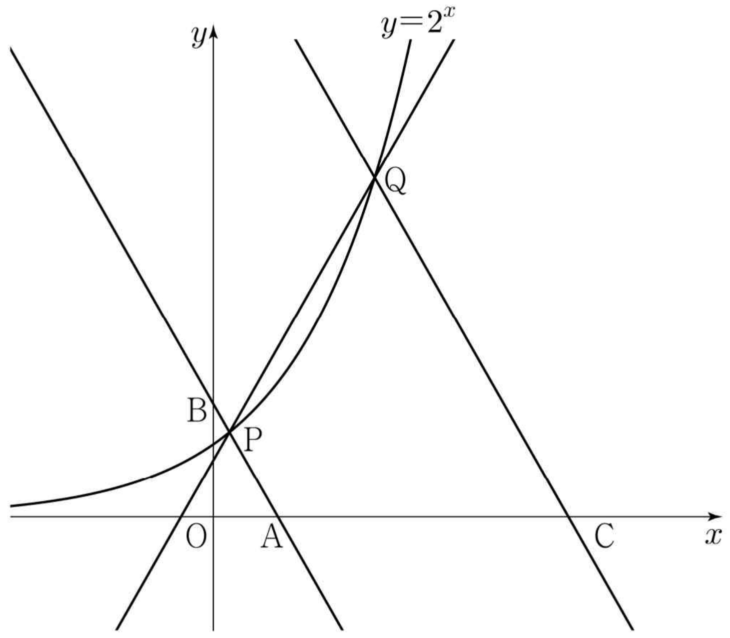
$|a_m|\ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [9월 15번][4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

9. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [9월 21번][4점]



10. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|\ \left(0\le x<\frac{4\pi}{a}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은? [10월 12번][4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

11. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

> 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [10월 15번][4점]

① 372　② 377　③ 382　④ 387　⑤ 392

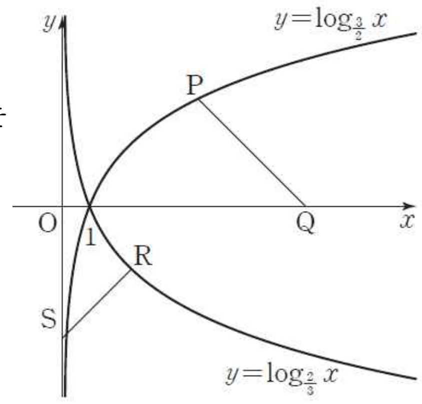
12. $2 \leq n \leq 7$인 자연수 n과 정수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 $(n,\ a)$의 개수는?
[수능특강][수1][1단원][Level3][1번]

> (가) $\sqrt[n]{a} < 0$
> (나) $\sqrt[n]{(-1)^n} \times \sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}} = -3$

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

13. 2 이상의 자연수 M에 대하여 $\log_4 M+\log_4(2\log_2 M)$의 값이 자연수가 되도록 하는 M의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $a_1\times a_3$의 값을 구하시오.
[수능특강][수1][1단원][Level3][4번]

14. 그림과 같이 곡선 $y=\log_{\frac{3}{2}} x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 또 곡선 $y=\log_{\frac{2}{3}} x$ 위의 제4사분면에 있는 점 R를 지나고 기울기가 1인 직선이 y축과 만나는 점을 S라 하자. 네 점 P, Q, R, S가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 P의 x좌표는? (단, O는 원점이다.)
[수능특강][수1][2단원][Level3][6번]



(가) $\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RS}}+\sqrt{2}$
(나) 두 점 P, R의 y좌표의 합은 1이다.

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

15. 좌표평면에서 직선 $\sqrt{3}x-3y=0$에 수직이고 원점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2=4$와 만나는 서로 다른 두 점 중 x좌표가 작은 점을 P, x좌표가 큰 점을 Q라 하자. 동경 OP가 나타내는 각을 α, 동경 OQ가 나타내는 각을 β라 할 때, $\sin\alpha\times\cos\beta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [수능특강][수1][3단원][예제][2번]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. $0<\theta<2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 각 θ에 대하여 $\sin(\theta-\pi)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$의 값은?

[수능특강][수1][3단원][Level2][2번]

(가) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 서로 일치한다.
(나) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ -1 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

17. $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y = -\cos^2 x - 2a\sin x + a + 4$의 최솟값을 $f(a)$라 하자. 방정식 $3f(a) - a + 4 = 0$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? [수능특강][수1][3단원][Level3][2번]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

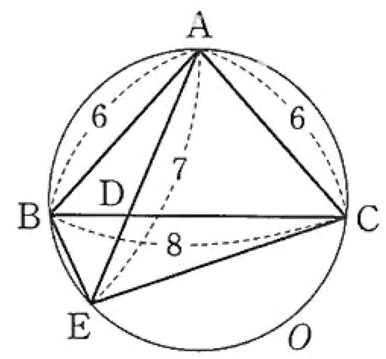
18. 5 이하의 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x) = \cos 2\pi x$, $g(x) = 2\sin \frac{\pi}{n} x$가 있다. $0 < x < 8$에서 방정식 $(f \circ g)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수가 10일 때, n의 값은? [수능특강][수1][3단원][Level3][3번]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

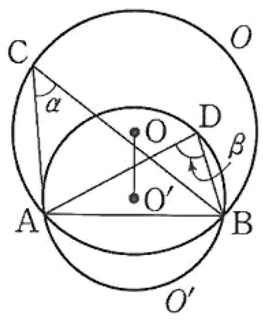
19. $\overline{AB}=4$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [수능특강][수1][4단원][유제][5번]

> (가) $b\cos C = c\cos B$
> (나) $\cos^2(A+B)=\cos^2 A+\sin^2 B$

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC가 원 O에 내접하고 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 할 때, $\overline{EA}=7$이다.
$9\left(\overline{EB}^2+\overline{EC}^2\right)$의 값을 구하시오.
[수능특강][수1][4단원][Level2][5번]



21. 그림과 같이 한 평면에서 선분 AB를 공통변으로 갖는 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원을 각각 O, O'이라 하고 $\angle\mathrm{ACB}=\alpha$, $\angle\mathrm{ADB}=\beta$라 할 때, 두 원 O, O'과 두 각의 크기 α, β는 다음 조건을 만족시킨다.
[수능특강][수1][4단원][Level3][1번]



(가) $4\sin\alpha=3\sin\beta$, $\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{5}{6}$
(나) 두 원 O, O'의 넓이의 합은 25π이다.

두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 할 때, 선분 OO′의 길이는? (단, 점 C는 원 O'의 외부에 있고, 점 D는 원 O의 내부에 있다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

22. 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 k에 대하여

$$b_n=(a_{n+6})^2-(a_n)^2,\ c_n=(a_{n+k})^2-(a_n)^2$$

이라 하자. 두 등차수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 할 때, $\dfrac{d_1}{d_2}=3$을 만족시키는 k의 값은?
[수능특강][수1][5단원][Level2][2번]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

23. $a_1 = 1$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{21} = -1$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{20} k(a_k - 2a_{k+1}) = 98$

$\sum_{k=1}^{18} k a_{k+2}$의 값은? [수능특강][수1][6단원][Level2][1번]

① -60　② -59　③ -58　④ -57　⑤ -56

24. 함수 $f(x) = \log_a x + b$의 그래프를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 그래프가 나타내는 함수를 $y = g(x)$라 하자. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$에서 만날 때, 두 상수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단, a는 1이 아닌 양수이다.)
[수능완성][지수로그][31번]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

25. 첫째항이 $\frac{6}{5}$이고 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_5=24$일 때, $10(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9-a_{10})$의 값은?
[수능완성][수열]][10번]

① -4092 ② -4090 ③ -4088
④ -4086 ⑤ -4084

26. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\leq 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [3월 12번][4점]

> (가) $x\neq 1$, $x\neq a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.
>
> (나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

27. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오. [4월 22번][4점]

28. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [6월 20][4점]

29. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [6월 22번][4점]

> $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

30. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [7월 15번][4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

31. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [9월 22번][4점]

32. 두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$에서 $f(x) = ax^2 + bx - 24$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.

$1 < x < 10$일 때, 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은? [10월 11번][4점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

33. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x) - x^2| \le 2$
> (나) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{8}$

$f(1)$의 값은? [수능특강][수2][1단원][유제][8번]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

34. 두 실수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 오차함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를 각각

$$A=\left\{a \,\middle|\, \lim_{x\to a}\frac{x^3(x-1)}{f(x)}\text{의 값이 존재한다.}\right\},$$
$$B=\left\{b \,\middle|\, \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{x^2(x-1)^4}\text{의 값이 존재하지 않는다.}\right\}$$

라 하자. $0\in(A-B)$, $1\in(B-A)$이고 $\lim_{x\to 3}f(x)=18$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [수능특강][수2][1단원][Level3][1번]

35. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3x+1 & (x<1) \\ f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [수능특강][수2][2단원][Level2][3번]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

36. 실수 t와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하다. 함수 $h(t)=g(t)-g(t-2)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 상수 a의 값의 합은? [수능특강][수2][5단원][Level2][6번]

① 24　② 27　③ 30　④ 33　⑤ 36

37. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

(나) $\int_0^2 f(x)dx=-\frac{4}{3}$

$\int_{-2}^{6} f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [수능특강][수2][6단원][Level2][6번]

38. 이차함수 $f(x)=x^2-(a+1)x+a$가

$$\int_1^2 (x^2+x)f'(x)dx+\int_1^2 (2x+1)f(x)dx=-12$$

를 만족시킬 때, $\int_1^a f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

[수능완성][적분법][5번]

① -5 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -4

④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -3

39. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=xf(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.
>
> (나) $\int_0^2 g'(x)dx=12$
>
> (다) $\int_{-2}^2 x\{f'(x)+1\}^2 dx=32$

$\int_0^2 \{f'(x)+f(x)\}dx$의 값은? [수능완성][적분법][9번]

① 10 ② 12 ③ 14

④ 16 ⑤ 18

40. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$

(나) $f(f(x))=(4x^2-3)f(x)-3\int_1^x f'(t)dt$

$f(5)$의 값을 구하시오. [수능완성][적분법][12번]

41. 곡선 $y=x^2-1$위의 점 중에서 원점에서 거리가 가장 가까운 점을 $\mathrm{P}(a,\ a^2-1)$, 곡선 $y=x^2-1$위의 점 P에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y=x^2-1$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $a>0$) [수능완성][적분법][22번]

① $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

42. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=6-2t$$

이다. 시각 $t=1$과 $t=k\,(k>1)$에서 점 P의 위치가 같을 때, 점 P가 시각 $t=1$과 $t=k$까지 움직인 거리는?
[수능완성][적분법][29번]

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

43. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=4t^2-3at+a,\ \ v_2(t)=t^2+3t-2a$$

이다. 시각 $t=k$에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 8이 되도록 하는 모든 양수 k의 개수가 4일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)
[수능완성][적분법][31번]

① 5　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{17}{3}$
④ 6　⑤ $\frac{19}{3}$

정답 및 해설

1	①	2	12	3	③	4	170	5	②
6	②	7	⑤	8	③	9	220	10	④
11	①	12	③	13	512	14	④	15	④
16	⑤	17	⑤	18	③	19	8	20	550
21	④	22	②	23	④	24	④	25	①
26	③	27	30	28	13	29	19	30	①
31	58	32	④	33	③	34	216	35	⑤
36	⑤	37	11	38	②	39	①	40	47
41	①	42	①	43	③				

■1. ①

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 수열의 첫째항을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d \ge 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d < 0$이어야 한다.

(i) $S_3 = S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2} = \dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$ 에서

$a_1 = -4d$이므로

$S_3 = S_6 = -9d > 0$,

$S_{11} = \dfrac{11(2a_1+10d)}{2} = 11d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-9d = -11d - 3$, $d = -\dfrac{3}{2}$

$a_1 = -4d = 6$

(ii) $S_3 = -S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2} = -\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$ 에서

$a_1 = -2d$이므로

$S_3 = -S_6 = -3d > 0$

$S_{11} = \dfrac{11(2a_1+10d)}{2} = 33d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-3d = -33d - 3$, $d = -\dfrac{1}{10}$

$a_1 = -2d = \dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은

$6 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{31}{5}$ 이다.

■2. 12

[출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $\mathrm{B}(b,\ a)$이다.

조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y = \log_2(x+2) + k$ 위의 점이므로

$b = \log_2(a+2) + k$ …… ㉠

조건 (나)에서 점 $\mathrm{B}(b,\ a)$가 곡선 $y = 4^{x+k} + 2$ 위의 점이므로

$a = 4^{b+k} + 2$ …… ㉡

㉠에서

$b - k = \log_2(a+2)$, $2^{b-k} = a + 2$

$a = 2^{b-k} - 2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 정리하면

$4^{b+k} + 2 = 2^{b-k} - 2$

$4^k \times 4^b - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0$ …… ㉣

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b는 오직 하나이고

$2^b = t\ (t > 0)$으로 놓으면 t에 대한 이차방정식

$4^k t^2 - 2^{-k} t + 4 = 0$ …… ㉤

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t에 대한 이차방정식 ㉤의 두 근의 곱은 $\dfrac{4}{4^k} = 4^{1-k} > 0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D라 할 때 $D = 0$이어야 한다.

$D = (-2^{-k})^2 - 4 \times 4^k \times 4$

$= 4^{-k} - 16 \times 4^k = 0$

위의 방정식의 양변에 4^k을 곱하여 정리하면

$2^{4k+4} = 1$, $k = -1$

㉤에 대입하여 정리하면

$\dfrac{1}{4}t^2 - 2t + 4 = 0$, $\dfrac{1}{4}(t-4)^2 = 0$

$t = 4$

즉, $2^b = 4$에서 $b = 2$이다.

$k = -1$, $b = 2$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$a = 4^{2+(-1)} + 2 = 6$

따라서 $a \times b = 6 \times 2 = 12$

■3. ③

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{8} a_n = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_7) + (a_4 + a_8)$

$= 15 \times 4 = 60$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$이므로 $\displaystyle\sum_{n=5}^{8} a_n = 54$

조건 (나)에 의하여

$a_6 = a_5 + 5$,

$a_7 = a_6 + 6 = a_5 + 11$,

$a_8 = a_7 + 7 = a_5 + 18$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=5}^{8} a_n = 4a_5 + 34 = 54$에서 $a_5 = 5$

■4. 170

[출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$a_{2m} = -a_m$에서 $a_m + md = -a_m$

$2a_m = -md$이므로

m과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

m이 짝수, 즉 $m = 2p$(p는 자연수)라 하면

$a_{2m} + a_m = a_{4p} + a_{2p}$

$= \{a_1 + (4p-1)d\} + \{a_1 + (2p-1)d\}$

$= 2\{a_1 + (3p-1)d\}$

$= 2a_{3p} = 0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 m은 홀수이고 d는 짝수이다.

$m = 2l - 1$(l은 자연수)라 하면

$a_{4l-2} = -a_{2l-1}$에서

$a_{3l-1} = a_{4l-2} - (l-1)d$

$= -a_{2l-1} - (l-1)d$

$=-a_{3l-2}$
이고 $d>0$이므로
$1 \le n \le 3l-2$일 때 $a_n<0$,
$n \ge 3l-1$일 때 $a_n>0$이다.
$\sum_{k=m}^{2m}|a_k|=\sum_{k=2l-1}^{4l-2}|a_k|$
$=-a_{2l-1}-a_{2l}-a_{2l+1}-\cdots-a_{3l-2}$
$+a_{3l-1}+a_{3l}+a_{3l+1}+\cdots+a_{4l-2}$
$=-a_{2l-1}-(a_{2l-1}+d)-(a_{2l-1}+2d)-\cdots-\{a_{2l-1}+(l-1)d\}$
$+(a_{2l-1}+ld)+\{a_{2l-1}+(l+1)d\}+\cdots+\{a_{2l-1}+(2l-1)d\}$
$=-\{1+2+3+\cdots+(l-1)\}d$
$+\{l+(l+1)+(l+2)+\cdots+(2l-1)\}d$
$=-\frac{l(l-1)}{2}d+\frac{l\{l+(2l-1)\}}{2}d$
$=l^2d=128$
l은 자연수이고 d는 짝수이므로 모든 순서쌍 (l,d)는
$(1,128)$, $(2,32)$, $(4,8)$, $(8,2)$이다.
따라서 모든 d의 값의 합은 $2+8+32+128=170$

■5. ②

수열의 귀납적 정의

$a_1=0$이므로
$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$
$a_2>0$이므로
$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$
$a_3<0$이므로
$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$
이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로
$n=3m-2$(m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다.
즉 $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.
한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로
$a_5=a_4-\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$
$a_5<0$이므로
$a_6=a_5+\frac{1}{k+1}=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{k-2}{k(k+1)}$
이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로
$n=5m-4$(m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다.
즉 $a_{22}\ne 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.
한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로
$a_7=a_6-\frac{1}{k}=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$
$a_7<0$이므로
$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\frac{k-3}{k(k+1)}$
마찬가지 방법으로 계속하면
$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.
$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\ne 0$이다.
$5 \le k \le 9$이면 $a_{22}\ne 0$이다.
$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.
$k \ge 11$이면 $a_{22}\ne 0$이다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은 1, 3, 10이므로
구하는 모든 k의 값의 합은
$1+3+10=14$

■6. ②

$\sqrt{3}^{f(n)}>0$이므로 $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}=3^{\frac{f(n)}{8}}$,
$-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}=3^{\frac{f(n)}{8}}$ 이다.
조건에 의하면 실수인 것의 곱이 -9이므로 $3^{\frac{f(n)}{8}}\times\left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-9$, 즉
$-3^{\frac{f(n)}{4}}=-9$이다.
따라서 $f(n)=8$이다.
함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 $f(n)=8$을 만족하는
자연수 n의 개수가 2개라 하였는데 함수 $f(x)$의 대칭축이
$x=2$이므로 만족하는 자연수 n은 1, 3이다.
즉, $f(1)=8$, $f(3)=8$이므로 $-1+k=8$이다.
$\therefore\ k=9$

■7. ⑤

$\angle CED=\frac{\pi}{4}$이므로 ΔECD에서 코사인법칙에 의해
$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$
에서 $\overline{CD}=\sqrt{10}$ ……㉠
반지름을 R라 하면 $\overline{OD}=R$, $\overline{OE}=R-4$이므로 삼각형 ODE에서 코사인법칙에 의해
$R^2=(R-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\cos\frac{3}{4}\pi$
$\therefore\ R=5$
$\angle CAD=\theta$라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2R$에서
$\frac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10\qquad\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$
따라서 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{CE}}{\sin\theta}$에서
$\overline{AC}=\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{5}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$
[다른 풀이]
$\angle CED=\frac{\pi}{4}$이므로 ΔECD에서 코사인법칙에 의해
$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$
에서 $\overline{CD}=\sqrt{10}$
$\angle OCD=\alpha$라 하면 ΔECD에서 코사인법칙에 의해
$\cos\alpha=\frac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times4\times10}=\frac{1}{\sqrt{10}}$
$\overline{OC}=R$이라 하면 ΔOCD에서 코사인법칙에 의해
$R^2=R^2+(\sqrt{10})^2-2R\times\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{10}}$에서 $R=5$
$\angle CAD=\beta$라 하면 ΔACD에서 사인법칙에 의해 $\frac{\sqrt{10}}{\sin\beta}=2R$에서 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$
ΔAED에서 사인법칙에 의해
$\frac{4}{\sin\beta}=\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi}$에서 $\overline{AC}=4\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

■8. ③

$a_4=r$이고 $|r|<1$이므로

$a_5=r+3$

$a_6=r+6$

$a_7=-\frac{1}{2}a_6=\frac{r+6}{-2}(\because a_5<5<a_6)$

$a_8=\frac{r+6}{-2}+3=-\frac{1}{2}r$

조건 (가)에서 $a_8=r^2$이므로 $r^2=-\frac{1}{2}r$에서 $r=-\frac{1}{2}$

주어진 조건에 따라 a_3, a_2, a_1을 구하면 다음과 같다.

a_4	a_3	a_2	a_1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	7	-14

이때,

$|a_{4n}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|<1$에서

$|a_{4n+1}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n+3\right|<5$

$|a_{4n+2}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n+6\right|>5$

$|a_{4n+3}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-3\right|<5$

이므로 a_{4n+2}만 5보다 크다.

따라서, $|a_m|\geq 5$를 만족하는 m의 개수는

$m=1, 2, 6, 10, \cdots, 98$의 26개다. 따라서 $p=26$,

$a_1=-14$이므로 $p+a_1=12$이다.

a_1	a_2	a_3	a_4
$-2r+3$ / $4r-12$	$-2r+6$	$r-3$	r

a_5	a_6	a_7	a_8
$r+3$	$r+6$	$\frac{r+6}{-2}$	$-\frac{1}{2}r$

$a_1<0$이고 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이므로

$a_8=-\frac{1}{2}r=r^2$

따라서 $r=-\frac{1}{2}$이고 $a_1=-14$이다.

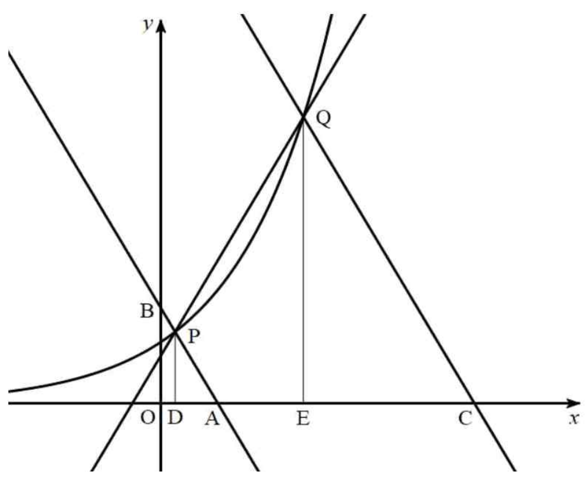
모든 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}|\geq 5$이고

$|a_1|=|-14|>5$이다.

따라서, $|a_m|\geq 5$를 만족하는 m의 개수는 $25+1=26$개다.

$p=26$, $a_1=-14$ 이므로 $p+a_1=12$이다.

■9. 220



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB}=k$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}=4\overline{PB}-\overline{PB}=3\overline{PB}=3k$

이고,

$\overline{CQ}=3\overline{AB}=3\times\overline{PB}=12\overline{PB}=12k$

이므로 $\overline{AP}:\overline{CQ}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle$PDA와 $\triangle$QEC는 닮음이므로

$\overline{PD}:\overline{QE}=\overline{AP}:\overline{CQ}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로 $2^b=4\times 2^a=2^{a+2}$에서

$b=a+2$

즉,

$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}=\frac{3\times 2^a}{2}=3\times 2^{a-1}$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times 2^{a-1}(x-a)$ …… ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times 2^{a-1}(x-a)$

$x=a+\frac{2}{3}$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\frac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle$APD와 $\triangle$ABO는 닮음이므로

$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AB}:\overline{PB}=4:1$

$a+\frac{2}{3}:a=4:1$

$a=\frac{2}{9}$

$b=a+2=\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$

따라서

$90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)=90\times\frac{22}{9}=220$

■10. ④

$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$에서

$4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2=2$ 또는 $4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2=-2$

$ax-\frac{\pi}{3}=\theta$라 할 때, $-\frac{\pi}{3}\leq\theta<\frac{11\pi}{3}$

$\sin\theta=0$ 또는 $\sin\theta=-1$

$\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$ $\quad\therefore\ n=6$

$x=\frac{\pi}{3a},\ \frac{4\pi}{3a},\ \frac{7\pi}{3a},\ \frac{10\pi}{3a},\ \frac{11\pi}{6a},\ \frac{23\pi}{6a}$

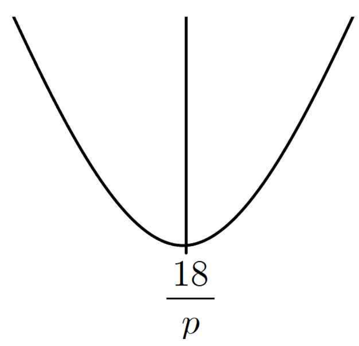
$\frac{\pi}{3a}+\frac{4\pi}{3a}+\frac{7\pi}{3a}+\frac{10\pi}{3a}+\frac{11}{6a}\pi+\frac{23}{6a}\pi$

$=\frac{(2+8+14+20+11+23)\pi}{6a}=\frac{78\pi}{6a}=\frac{13\pi}{a}=39$

$\therefore\ a=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

■11. ①



S_n을 이차함수로 생각하면, 위의 그림과

같이 대칭축이 $x=\frac{18}{p}$가 된다.

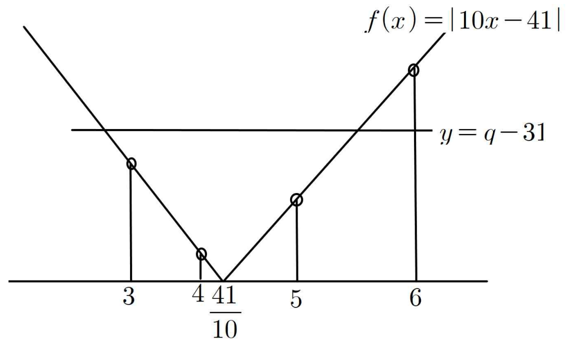
$p=1,\ 2,\ 3$일 때는
$\frac{18}{p}$가 자연수가 되어서 좌우에 다른
자연수에서의 함숫값이 같은 값이 된다.

$p=4$일 때는 축이 $\frac{18}{p}=\frac{9}{2}$가 돼서
$n=4$일 때와
$n=5$일 때의 값이 같아진다.

그러므로 $p_1=5$에서 대칭축이 $x=\frac{18}{5}$가
되어 모든 S_n의 값이 다른 값이 된다.

∴ $S_n=5n^2-36n+q,\ a_n=10n-41$
$(n\ge 2)$,
$a_1=q-31$

$|a_k|<a_1$이므로 $|10n-41|<q-31$
$f(x)=|10x-41|,\ y=q-31$이라 할 때,
$f(3)=11,\ f(4)=1,\ f(5)=9,\ f(6)=19$



그림과 같이 만족하는 정수가 3개이므로
$q-31$은 $f(3)$과 $f(6)$사이에
존재해야한다.
$11<q-31\le 19$, ∴ $42<q\le 50$

∴ $\frac{8\times(43+50)}{2}=4\times 93=372$

■12. ③

조건 ㈎에서 $\sqrt[n]{a}<0$이므로 n은 홀수이고 a는 음수이다.
한편 n이 홀수이므로 조건 ㈏에서
$\sqrt[n]{(-1)^n}\times\sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}}=-|n+a|=-3$
즉, $|n+a|=3$
(i) $n+a=3$일 때
n은 3, 5, 7이고 $a<0$이므로 구하는 순서쌍 $(n,\ a)$는
$(5,\ -2),\ (7,\ -4)$
(ii) $n+a=-3$일 때
n은 3, 5, 7이고 $a<0$이므로 구하는 순서쌍 $(n,\ a)$는
$(3,\ -6),\ (5,\ -8),\ (7,\ -10)$
(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 $(n,\ a)$의 개수는
$2+3=5$

■13. 512

$\log_4 M+\log_4(2\log_2 M)=\log_4\{M\times(2\log_2 M)\}$
의 값이 자연수가 되어야 하므로 이 자연수를 n이라 하면
$\log_4\{M\times(2\log_2 M)\}=n$
$2M\times\log_2 M=4^n$ …… ㉠
이때 M이 2이상의 자연수이므로 $\log_2 M$은 유리수이어야 한다.
즉, $\log_2 M=\frac{q}{p}$ (p와 q는 서로소인 자연수)
로그의 정의에 의해
$M=2^{\frac{q}{p}}$이고 이 값은 2이상의 자연수이어야 하므로 $p=1$,
즉 $M=2^q$이다.

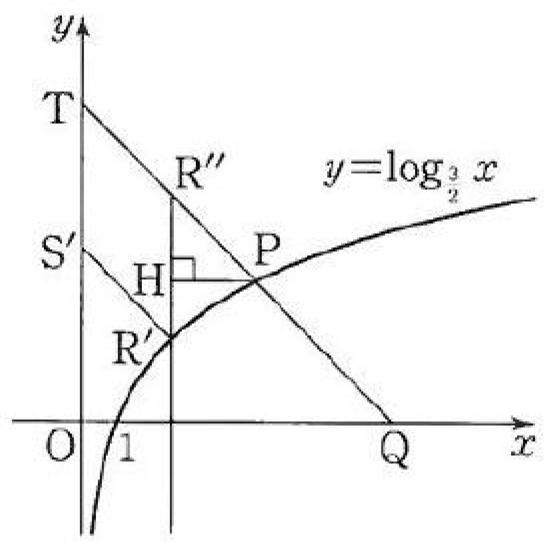
그러므로 ㉠에서
$2^{q+1}\times q=4^n$ …… ㉡
이때 $q=2^l$ (l은 0이상의 정수)꼴이어야 하므로 l의 값에
0이상의 정수를 차례로 대입하면 ㉡은
$q=2^0$일 때, $2^{1+1}\times 1=4$
$q=2^1$일 때, $2^{2+1}\times 2^1=2^4=4^2$
$q=2^2$일 때, $2^{4+1}\times 2^2=2^7$
$q=2^3$일 때, $2^{8+1}\times 2^3=2^{12}=4^6$
⋮
따라서 M의 값은 $2^1,\ 2^2,\ 2^8,\ \cdots$이므로
$a_1\times a_3=2\times 2^8=2\times 256=512$

[참고]
㉡에서 $2^{q+1}\times q=4^n$이고 $q=2^l$이므로
$2^{2^l+1+l}=2^{2n}$
$2^l+1+l=2n$
그러므로 l은 0 또는 홀수이다.

■14. ④

$y=\log_{\frac{3}{2}}x=-\log_{\frac{2}{3}}x$이므로 함수 $y=\log_{\frac{2}{3}}x$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{3}{2}}x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 두 점 R, S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R′, S′이라 하면 점 R′은 곡선 $y=\log_{\frac{3}{2}}x$위에 있고 점 S′은 y축 위에 있다.

또 직선 R′S′의 기울기는 -1이므로 직선 PQ와 평행하고 $\overline{RS}=\overline{R'S'}$ …… ㉠



이때 직선 PQ가 y축과 만나는 점을 T라 하면 직선 PQ의 기울기가 -1이므로
직각삼각형 OQT에서
$\sqrt{2}\times\overline{OQ}=\overline{QT}$ …… ㉡
또 점 R′을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 PQ와 만나는 점을 R″이라 하면
$\overline{S'R'}=\overline{TR''}$ …… ㉢
조건 ㈎에서
$\sqrt{2}\times\overline{OQ}=\overline{PQ}+\overline{RS}+\sqrt{2}$이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서
$\overline{TQ}=\overline{PQ}+\overline{TR''}+\sqrt{2}$
$\overline{TQ}-\overline{PQ}-\overline{TR''}=\sqrt{2}$
즉, $\overline{R''P}=\sqrt{2}$
점 P에서 선분 R″R′에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle HPR''=45^\circ$ 이므로
$\overline{PH}=1$
그러므로 R′의 x좌표를 a라 하면 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.
한편 조건 ㈏에서 두 점 P와 R의 y좌표의 합이 1이므로
$\log_{\frac{3}{2}}(a+1)-\log_{\frac{3}{2}}a=1$
$\log_{\frac{3}{2}}\frac{a+1}{a}=1$
$\frac{a+1}{a}=\frac{3}{2}$

$a=2$
따라서 점 P의 x좌표는
$a+1=3$

■15. ④

직선 $\sqrt{3}x-3y=0$에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x$이므로
이것을 $x^2+y^2=4$에 대입하면
$x^2+(-\sqrt{3}x)^2=4$, $4x^2=4$, $x^2=1$에서 $x=-1$또는 $x=1$
이것을 $y=-\sqrt{3}x$에 대입하면
$x=-1$일 때, $y=\sqrt{3}$, $x=1$일 때, $y=-\sqrt{3}$이므로
점 P의 좌표는 $(-1,\ \sqrt{3})$, 점 Q의 좌표는 $(1,\ -\sqrt{3})$
따라서 $\sin\alpha\times\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

■16. ⑤

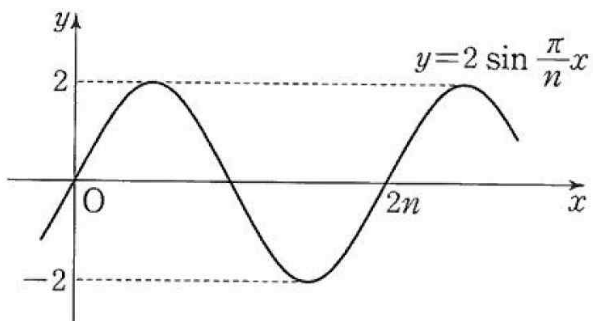
조건 (가)에서 $7\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)
즉, $\theta=\dfrac{n}{3}\pi$
이때 $0<\theta<2\pi$이므로
$0<\dfrac{n}{3}\pi<2\pi$
$0<n<6$
n은 정수이므로
$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
조건 (나)에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로
$n=5$
따라서 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$이므로
$\sin(\theta-\pi)+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin(\pi-\theta)-\sin\theta$
$=-\sin\theta-\sin\theta$
$=-2\sin\theta$
$=-2\sin\dfrac{5}{3}\pi$
$=-2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=\sqrt{3}$

■17. ⑤

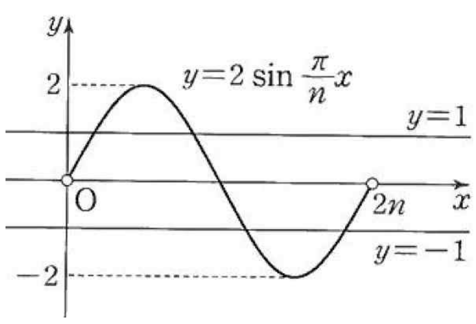
$\cos^2x=1-\sin^x$이므로
$y=-\cos^2x-2a\sin x+a+4$
$=-(1-\sin^2x)-2a\sin x+a+4$
$=\sin^2x-2a\sin x+a+3$
$0\le x<2\pi$에서 $-1\le \sin x\le 1$이므로
$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면
$y=t^2-2at+a+3$
$=(t-a)^2-a^2+a+3$
함수 $y=t^2-2at+a+3$의 최솟값 $f(a)$와 방정식 $3f(a)-a+4=0$의 실근은 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.
(ⅰ) $a\le -1$일 때
$y=t^2-2at+a+3$은 $t=-1$일 때 최소이므로 $f(a)=3a+4$
$3f(a)-a+4=0$에서 $3(3a+4)-a+4=0$
$8a+16=0$
$a=-2$
$a\le -1$이므로 $a=-2$
(ⅱ) $-1<a<1$
함수 $y=t^2-2at+a+3=(t-a)^2-a^2+a+3$은 $t=a$일 때 최소이므로
$f(a)=-a^2+a+3$
$3f(a)-a+4=0$
$3(-a^2+a+3)-a+4=0$
$-3a^2+2a+13=0$
$g(a)=-3a^2+2a+13$이라 하면
$g(a)=-3a^2+2a+13=-3\left(a-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{40}{3}$
$g(-1)=8>0$, $g(1)=12>0$이므로
$-1<a<1$에서 $g(a)=0$이 되는 a의 값은 존재하지 않는다.
(ⅲ) $a\ge 0$일 때
함수 $y=t^2-2at+a+3$은 $t=1$일 때 최소이므로
$f(a)=-a+4$
$3f(a)-a+4=0$
$3(-a+4)-a+4=0$
$-4a+16=0$
$a=4$
$a\ge 1$이므로 $a=4$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은 -2, 4이므로 그 합은
$-2+4=2$

■18. ③

$g(x)=t$라 하면
$t=2\sin\dfrac{\pi}{n}x$, $-2\le t\le 2$
한편, 방정식 $(f\circ g)(x)=1$에서
$f(g(x))=1$
$f(t)=1$
$\cos2\pi t=1$
$2\pi t=2k\pi$ (k는 정수)
$-2\le t\le 2$이므로
$t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$
한편, 함수 $y=2\sin\dfrac{\pi}{n}x$는 최솟값과 최댓값이 -2, 2이고 주기가
$\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{n}}=2n$이므로 그래프는 그림과 같다.



방정식 $t=2\sin\dfrac{\pi}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=2\sin\dfrac{\pi}{n}x$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로 $0<x<2n$에서 t의 값에 따라 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.



(ⅰ) $2\sin\dfrac{\pi}{n}x=-2$일 때
서로 다른 실근의 개수는 1
(ⅱ) $2\sin\dfrac{\pi}{n}x=-1$일 때
서로 다른 실근의 개수는 2
(ⅲ) $2\sin\dfrac{\pi}{n}x=0$일 때

서로 다른 실근의 개수는 1

(ⅳ) $2\sin\frac{\pi}{n}x=1$ 일 때

서로 다른 실근의 개수는 2

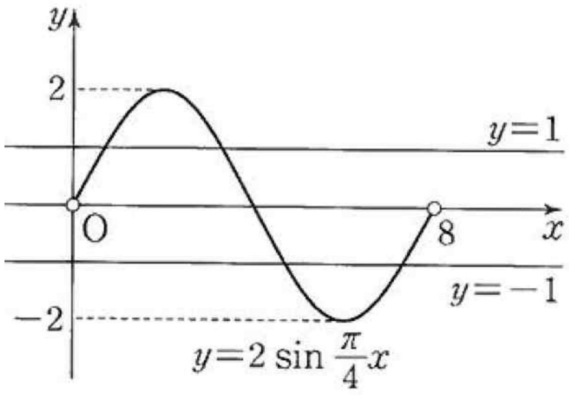
(ⅴ) $2\sin\frac{\pi}{n}x=2$ 일 때

서로 다른 실근의 개수는 1

따라서 $0<x<2n$ 에서 $t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$일 때 방정식

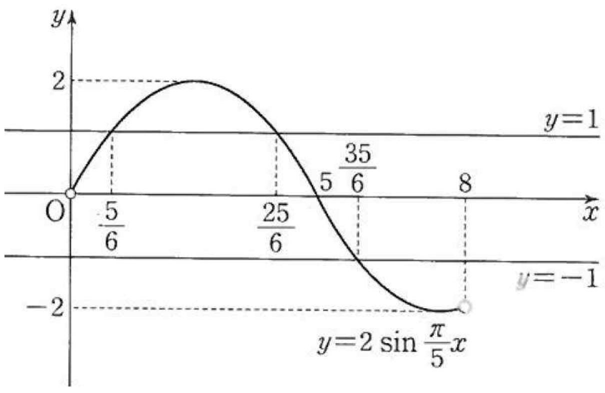
$t=2\sin\frac{\pi}{n}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7 이므로 $n=4$ 일 때 $0<x<8$ 에서

방정식 $(f\circ g)(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7 이다.



$n=5$ 이면 $\frac{3}{2}\pi<\frac{8}{5}\pi$ 이므로 $0<x<8$ 에서 방정식

$(f\circ g)(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6 이다.



■19. 8

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

조건 (가)에서 $b\cos C=c\cos B$이므로

$b\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

$b^2=c^2$

$b>0,\ c>0$ 이므로

$b=c$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\cos^2(A+B)=\cos^2A+\sin^2B$ 이고

$A+B+C=\pi$ 이므로

$A+B=\pi-C$

$\cos^2(\pi-C)=\cos^2A+\sin^2B$

$\cos^2C=\cos^2A+\sin^2B$

$1-\sin^2C=(1-\sin^2A)+\sin^2B$

$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$ 이므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$a^2=b^2+c^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$ 이고 $b=c$ 인 직각이등변삼각형이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$

■20. 550

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BAC)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{6^2+6^2-8^2}{2\times6\times6}=\dfrac{1}{9}$

$\cos(\angle ABC)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{6^2+8^2-6^2}{2\times6\times8}=\dfrac{2}{3}$

$\overline{AB}=\overline{AC}$ 이므로

$\angle ABC=\angle ACB$

$\cos(\angle ACB)=\dfrac{2}{3}$

$\overline{EB}=x,\ \overline{EC}=y$라 하면

삼각형 ABE 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{EB}^2+\overline{EA}^2-2\times\overline{EB}\times\overline{EA}\times\cos(\angle AEB)$

$6^2=x^2+7^2-2x\times7\times cos(\angle AEB)$

$\angle AEB=\angle ACB$ 이므로

$\cos(\angle AEB)=\cos(\angle ACB)=\dfrac{2}{3}$

$6^2=x^2+7^2-\dfrac{28}{3}x$ …… ㉠

삼각형 AEC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{EC}^2+\overline{EA}^2-2\times\overline{EC}\times\overline{EA}\times\cos(\angle AEC)$

$6^2=y^2+7^2-2y\times7\times cos(\angle AEC)$

$\angle AEC=\angle ABC$ 이므로

$\cos(\angle AEC)=\cos(\angle ABC)=\dfrac{2}{3}$

$6^2=y^2+7^2-\dfrac{28}{3}y$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$0=x^2-y^2-\dfrac{28}{3}(x-y)$

$(x-y)(x+y)-\dfrac{28}{3}(x-y)=0$

$x\neq y$ 이므로

$x+y-\dfrac{28}{3}=0$

$x+y=\dfrac{28}{3}$ …… ㉢

삼각형 BEC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=x^2+y^2-2xyxos(\angle BEC)$

$\angle BAC+\angle BEC=\pi$ 이므로

$\cos(\angle BEC)=\cos(\pi-\angle BAC)$

$=-\cos(\angle BAC)$

$=-\frac{1}{9}$

$\overline{BC}^2=x^2+y^2+\frac{2}{9}xy$

$8^2=x^2+y^2+\frac{2}{9}xy$

$64=x^2+y^2+\frac{2}{9}xy$

$=(x+y)^2-2xy+\frac{2}{9}xy$

$=(x+y)^2-\frac{16}{9}xy$

㉢을 대입하면

$64=\left(\frac{28}{3}\right)^2-\frac{16}{9}xy$

따라서 $xy=13$이므로

$x^2+y^2=64-\frac{2}{0}\times 13=\frac{550}{9}$

즉, $9\left(\overline{EB}^2+\overline{EC}^2\right)=550$

■21. ④

두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 R, R'이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=2R$

즉, $\sin\alpha=\frac{\overline{AB}}{2R}$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\beta}=2R'$

즉, $\sin\beta=\frac{\overline{AB}}{2R'}$

조건 (가)에서 $4\sin\alpha=3\sin\beta$이므로

$4\times\frac{\overline{AB}}{2R}=3\times\frac{\overline{AB}}{2R'}$

$4R'=3R$

$R'=\frac{3}{4}R$

한편, 두 원 O, O'의 넓이의 합은

$\pi(R^2+R'^2)=\pi\left\{R^2+\left(\frac{3}{4}R\right)^2\right\}$

$=\frac{25}{16}R^2\pi$

조건 (나)에서 두 원 O, O'의 넓이의 합이 25π이므로

$\frac{25}{16}R^2\pi=25\pi$에서

$R^2=16$

$R>0$이므로 $R=4$

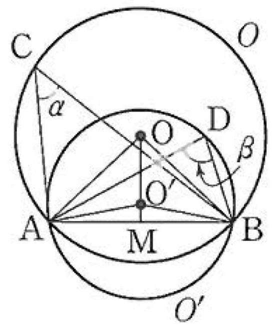
$R'=\frac{3}{4}R=3$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$AOO'=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 2\alpha=\alpha$

$\angle AO'M=\frac{1}{2}\angle AO'B=\frac{1}{2}\times 2\beta=\beta$이므로

$\angle OAO'=\beta-\alpha$



삼각형 OAO'에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OO'}^2=R^2+R'^2-2RR'\times\cos(\beta-\alpha)$

$=4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{5}{6}$

$=5$

따라서 $\overline{OO'}=\sqrt{5}$

■22. ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$=dn+a-d$

이때

$b_n=(a_{n+6}-a_n)(a_{n+6}+a_n)$

$=6d\times(a_n+6d+a_n)$

$=6d\times(2a_n+6d)$

이므로

$d_1=b_2-b_1$

$=6d(2a_2+6d)-6d(2a_1+6d)$

$=12d(a_2-a_1)$

$=12d^2$

또

$c_n=(a_{n+k}-a_n)(a_{n+k}+a_n)$

$=kd\times(a_n+kd+a_n)$

$=kd\times(2a_n+kd)$

이므로

$d_2=c_2-c_1$

$=kd(2a_2+kd)-kd(2a_1+kd)$

$=2kd(a_2-a_1)$

$=2kd^2$

따라서 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{12d^2}{2kd^2}=\frac{6}{k}$이므로

$\frac{6}{k}=3$에서 $k=2$

■23. ④

$\sum_{k=1}^{20}k(a_k-2a_{k+1})$

$=(a_1-2a_2)+2(a_2-2a_3)+3(a_3-2a_4)+4(a_4-2a_5)$
$+\cdots+19(a_{19}-2a_{20})+20(a_{20}-2a_{21})$

$=a_1-a_3-2a_4-3a_5-\cdots-18a_{20}-40a_{21}$

$=a_1-(a_3+2a_4+3a_5+\cdots+18a_{20})-40a_{21}$

$=a_1-\sum_{k=1}^{18}ka_{k+2}-40a_{21}$

따라서 조건 (가)와 (나)에서

$98=1-\sum_{k=1}^{18}ka_{k+2}+40$이므로

$\sum_{k=1}^{18}ka_{k+2}=1+40-98=-57$

■24. ④

$f(x)=\log_a x+b$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$f(1)=2$에서 $\log_a 1+b=2,\ b=2$

함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $(1,\ 2)$를 지나고 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(1)=2$에서 $f(2)=1$

이때 $f(x)=\log_a x+2$이므로

$f(2)=1$에서 $\log_a 2+2=1$

$\log_a 2=-1$

$a^{-1}=2,\ a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

■25. ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면 $a_3+a_5=24$에서

$\dfrac{6}{5}\times(r^2+r^4)=24,\ (r^2)^2+r^2-20=0,\ (r^2+5)(r^2-4)=0$

$r^2>0$이므로 $r^2=4$

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9-a_{10}=S$라 하면 S는 첫째항이 $\dfrac{6}{5}$이고 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$10(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9-a_{10})=10S$

$=10\times\dfrac{\frac{6}{5}\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}$

$=-4092$

■26. ③

[출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $f(1)=0,\ f(a)=0$이고, $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=-1$,

$\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=-4+2a$에서 $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=a,\ x=2$에서 연속이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=h(1),\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0,\ \lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0,\ g(a)=0$

또, $\displaystyle\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)},\ \frac{g(2)}{-1}=\frac{g(2)}{-4+2a}$이므로 $g(2)=0$이고

$g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}$

$=\dfrac{1-a}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}$

$=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}$

$h(1)=h(a)$이므로

$\dfrac{1-a}{2}=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}$

$a>2$이므로 $a=4$

따라서

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le2)\\ -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$h(1)+h(3)=-\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{13}{6}$

■27. 30

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

0 또는 1 또는 2이다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\ge0$

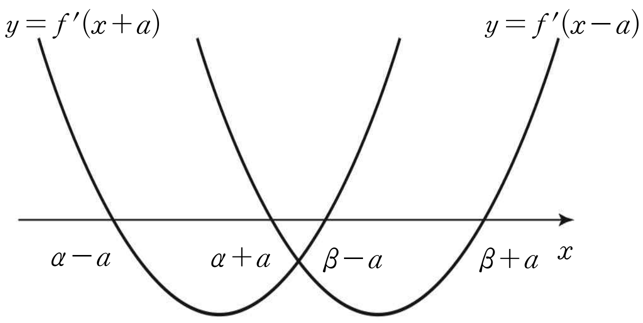
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a),\ y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

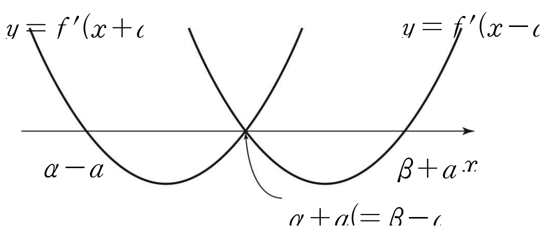
x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a,\ x=\alpha+a,\ x=\beta-a,\ x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a),\ y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$ $(=\beta-a)$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만
극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\frac{13}{2}-\frac{1}{2}=6$

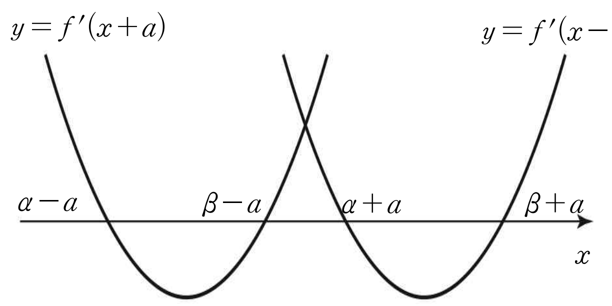
$\beta-\alpha=2a$이므로
$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

$4a=6$에서 $a=\frac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때
두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의
그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는
$x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서
극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$f(x)=\int(3x^2-21x+30)dx$

$=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x-\frac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{21}{2}+30-\frac{1}{2}\right)=30$

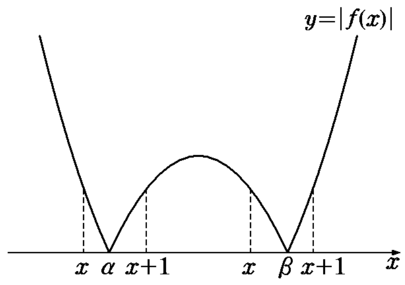
■28. 13

다항함수의 적분법

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이면

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt=\int_x^{x+1}f(t)dt$

이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은
1개뿐이다. 따라서 조건을 만족시키지 못한다.
$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고 $x=1$, $x=4$에서
함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$$
$$=\int_x^{\alpha}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}dt$$
$$=-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)dt$$
$$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$
$$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$
$$-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$$

이므로
$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$
$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$
$=6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$
$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0$ ……㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$$
$$=\int_x^{\beta}\{-f(t)\}dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$$
$$=\int_{\beta}^{x}f(t)dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$$
$$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt+\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$
$$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$$
$$+\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$$

이므로
$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$
$g'(4)=2(4-\alpha)(4-\beta)+2(5-\alpha)(5-\beta)$
$=82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$
$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha\beta=\frac{13}{2}$이므로

$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

■29. 19

함수의 연속

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면
$x=0$에서 연속이어야 한다.
따라서

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$ ……㉠

이 성립한다.
이때

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)f(x)=3f(0)$,

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$,

$g(0)=af(-b)$

이므로 ㉠에서

$3f(0)=af(-b)$ ……㉡

한편,

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|} \quad ……㉢$$

이때 $t\neq-3$이고 $t\neq6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad ……㉣$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로 $g(6)=0$, 즉

$(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로 $f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(i) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때

$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\geq0$ 또는 $k=3$ ……㉤

$x\geq0$에서

$g(x)=(x+a)f(x-9)=(x+a)(x-6)(x-9+k)$

이때 $x\geq0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로

$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ ……㉥

㉤, ㉥에서 $k=3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서

$3\times3^2=af(-9)$, $27=36a$

$a=\frac{3}{4}$

따라서

$g(4)=(4+a)f(4-b)$

$=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)$

$=\frac{19}{4}\times(-2)^2=19$

(ii) $k-b=-6$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\geq0$ 또는 $k=3$

$x\geq0$에서

$g(x)=(x+a)f(x-b)$

$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$

$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$

이때 $x\geq0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로

$b-3=6$에서 $b=9$

$k-b=-6$에서 $k=3$

따라서 (i)과 같은 결과이므로

$g(4)=19$이다.

■30. ①

다항함수의 적분법

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

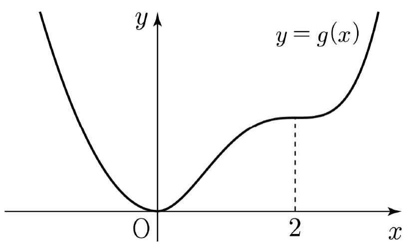
$$g(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0)\\ \int_0^x t(t-2)^2\,dt & (x\geq0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	2	…
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma\,(\gamma<0)$, 2라 하면

$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$$

$x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$$

함수 $x=2$에서 미분가능하다.
함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2\,dt=\frac{4}{3}$이므로

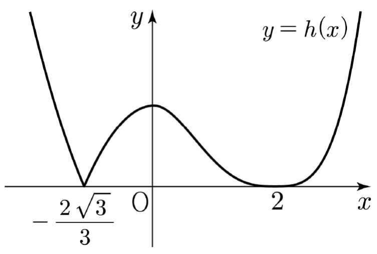
$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

참고

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



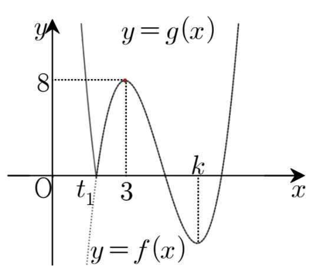
■31. 58

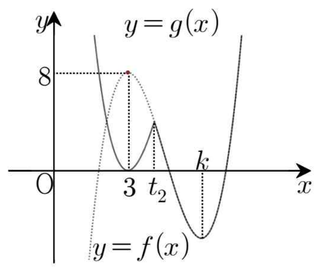
$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$에서

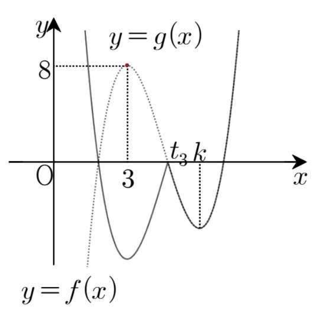
$\lim_{x\to t-} g(x)=\lim_{x\to t+} g(x)=g(t)=f(t)$

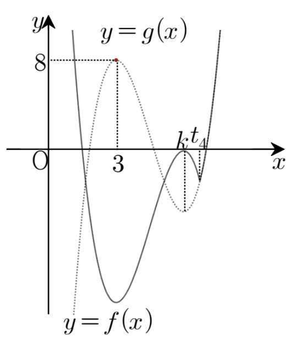
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

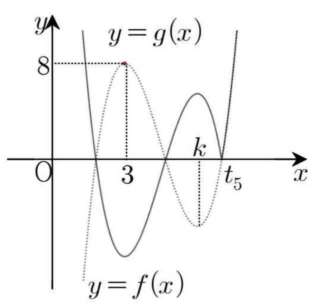
우선 $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.





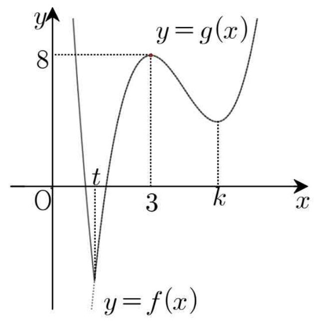




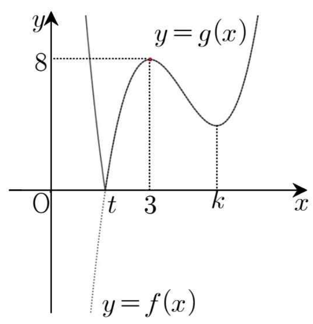


따라서 함수 $h(t)$는 $t=t_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.

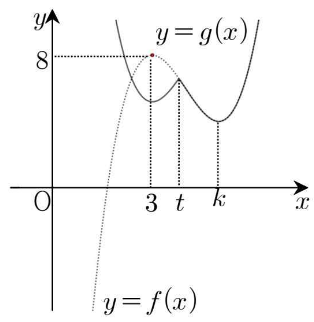
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



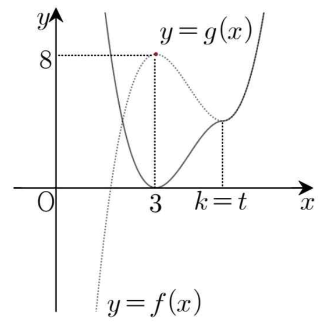
[교점 2개]



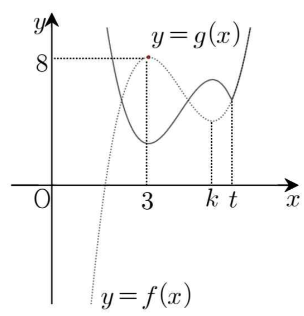
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$

이고 이때 $g(3)=0$에서
$-f(3)+2f(k)=0$
즉 $-8+2f(k)=0$에서 $\quad f(k)=4$
한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로
$x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고
$f'(x)=3(x-3)(x-k)$
$=3x^2-3(3+k)x+9k$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\frac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$

$C=\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\frac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k=4$,

$-\frac{k^3}{2}+\frac{9}{2}k^2-\frac{27}{2}k+\frac{35}{2}=0$,

$k^3-9k^2+27k-35=0$,

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

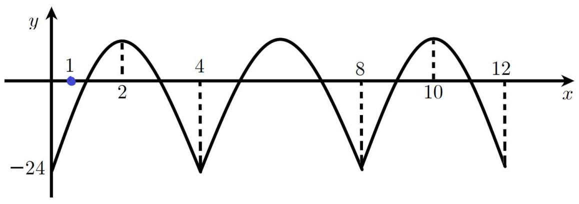
이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

■32. ④

주어진 주기함수가 연속함수이므로 $f(0)=f(4)$

$-24=16a+4b-24$, $b=-4a$,



$f(x)=ax^2-4ax-24$에서 조건에 맞게 그래프를 그려주면 위의 그림과 같다.

$f(x)=0$의 실근이 5개 일 때, $ax^2-4ax-24=0$의 근이 구간 $(1,\ 2)$사이에 존재해야하므로

$(-3a-24)(-4a-24)<0$, $-6<a<-8$,

그러므로 $a=-7$, $b=28$

$\therefore\ a+b=21$

■33. ③

조건 (가) $|f(x)-x^2|\le 2$에서

$-2\le f(x)-x^2\le 2$

$x^2-2\le f(x)\le x^2+2$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $x^2>0$이므로

$1-\dfrac{2}{x^2}\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le 1+\dfrac{2}{x^2}$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

따라서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

조건 (나) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{4x^2+4x-3}=\frac{1}{8}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to\dfrac{1}{2}$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $f(x)$는 $x-\dfrac{1}{2}$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+a)$ (a는 상수)라 하면 ㉠에서

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+a)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+a}{4\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+a}{8}=\frac{1}{8}$$

따라서 $\dfrac{1}{2}+a=1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$이고

$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$이므로

$f(1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$

■34. 216

(ⅰ) $0\in(A-B)$에서 $0\in A$이고 $0\notin B$이다.

$0\notin B$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2(x-1)^4}$의 값이 존재하므로

$f(x)$는 x^q (q는 2 이상의 자연수)를 인수로 갖는다.

$0\in A$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3(x-1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$f(x)$는 x^2 또는 x^3을 인수로 갖는다.

(ⅱ) $1\in(B-A)$에서 $1\in B$이고 $1\notin A$이다.

$1\notin A$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3(x-1)}{f(x)}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)$는 $(x-1)^s$ (s는 2 이상의 자연수)를 인수로 갖는다.

$1\in B$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2(x-1)^4}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)$는 $(x-1)^2$ 또는 $(x-1)^3$을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 오차함수이므로

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$f(x)=x^2(x-1)^2(x-k)$ $(k\ne 0,\ k\ne 1)$

또는 $f(x)=x^3(x-1)^2$

또는 $f(x)=x^2(x-1)^3$

이때 $f(x)=x^3(x-1)^2$이면 $\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)=108$,

$f(x)=x^2(x-1)^3$이면 $\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)=72$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)=18$을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)=x^2(x-1)^2(x-k)$ $(k\ne 0,\ k\ne 1)$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)=36(3-k)=18$에서 $k=\dfrac{5}{2}$

따라서 $f(x)=x^2(x-1)^2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$이므로

$f(4)=16\times 9\times\dfrac{3}{2}=216$

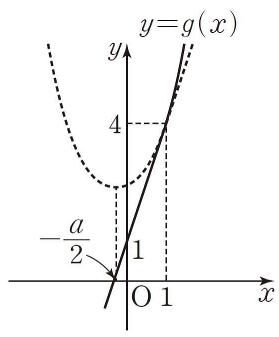
■35. ⑤

$f(x)=x^2+ax+b$

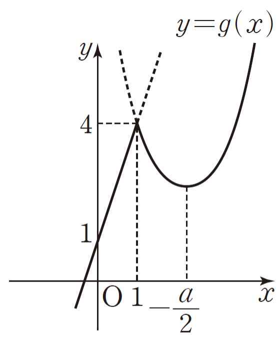
$\quad=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$ (a, b는 상수) 라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면

$-\dfrac{a}{2}\le 1$이어야 한다.



$\left[-\dfrac{a}{2}\le 1\text{일 때}\right]$



$\left[-\dfrac{a}{2}>1\text{일 때}\right]$

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$을 만족시켜야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}(3x+1)=4$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$

$g(1)=f(1)=1+a+b$ 이므로

$1+a+b=4$에서 $b=3-a$ …… ㉠

(ⅱ) $-\dfrac{a}{2}\le 1$에서 $a\ge -2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(2)=4+2a+b=4+2a+(3-a)=a+7\ge 5$

이므로 $f(2)$의 최솟값은 5이다.

■36. ⑤

$f(x)=x^3-3x^2-9x+10$에서

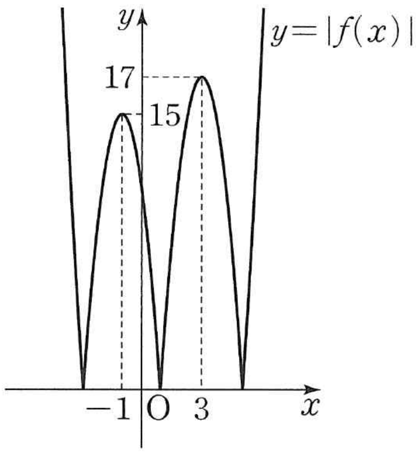
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

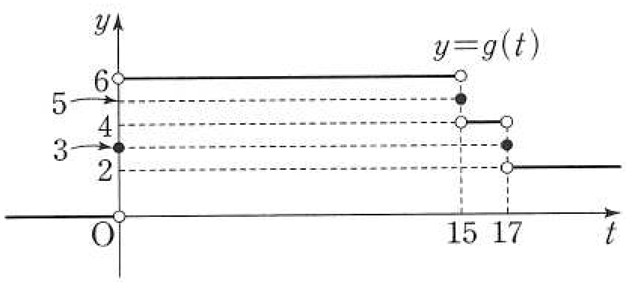
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	15	↘	-17	↗

함수$y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 6 & (0<t<15)\\ 5 & (t=15)\\ 4 & (15<t<17)\\ 3 & (t=17)\\ 2 & (t>17)\end{cases}$$



이때 함수 $h(t)=g(t)=g(t-2)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 6 & (0<t<2)\\ 3 & (t=2)\\ 0 & (2<t<15)\\ -1 & (t=15)\\ -2 & (15<t<19)\\ -1 & (t=19)\\ 0 & (t>19)\end{cases}$$

함수 $y=h(t)$는 $t=0,\ 2,\ 15,\ 19$에서 불연속이다.

따라서 a의 값은 $0,\ 2,\ 15,\ 19$이고, 그 합은 $0+2+15+19=36$

■37. 11

조건 (가)에서

$$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}\{f(x)-2\}dx$$

$$\int_{2}^{4}f(x)dx=\int_{0}^{2}\{f(x)+2\}dx$$

$$\int_{4}^{6}f(x)dx=\int_{0}^{2}\{f(x)+4\}dx$$

조건 (나)에서

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=-\frac{4}{3}$$

이므로

$$\int_{-2}^{6}f(x)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{6}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{2}\{f(x)-2\}dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}\{f(x)+2\}dx+\int_{0}^{2}\{f(x)+4\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\{4f(x)+4\}dx$$

$$=4\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}4dx$$

$$=4\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\Big[4x\Big]_{0}^{2}$$

$$=-\frac{16}{3}+8$$

$$=\frac{8}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=8$이므로

$p+q=3+8=11$

■38. ②

$f(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$에서 $f(1)=0$이고

$\dfrac{d}{dx}\{(x^2+x)f(x)\}=(x^2+x)f'(x)+(2x+1)f(x)$이므로

$$\int_{1}^{2}(x^2+x)f'(x)dx+\int_{1}^{2}(2x+1)f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{2}\{(x^2+x)f'(x)+(2x+1)f(x)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\{(x^2+x)f(x)\}'dx$$

$$=\Big[(x^2+x)f(x)\Big]_{1}^{2}$$

$=6f(2)-2f(1)$

$=6f(2)$

즉, $6f(2)=-12$에서 $f(2)=-2$이므로

$f(2)=2-a=-2$에서 $a=4$

따라서 $f(x)=x^2-5x+4$이므로

$$\int_{1}^{a}f(x)dx=\int_{1}^{4}(x^2-5x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_{1}^{4}$$

$$=-\frac{9}{2}$$

■39. ①

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$는 짝수차항으로만 이루어져 있고 상수항은 0이다.

이때 함수 $f'(x)$는 홀수차항으로만 이루어져 있으므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.

$g(x)=xf(x)$이므로

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

조건 (나)에서

$$\int_{0}^{2}g'(x)dx=\Big[g(x)\Big]_{0}^{2}=g(2)-g(0)=2f(2)=12$$

이므로 $f(2)=6$

또 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$$\int_{0}^{2}g'(x)dx=\int_{0}^{2}\{f(x)+xf'(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}xf'(x)dx=12\ \cdots\ ㉠$$

조건 (다)에서

$$\int_{-2}^{2}x\{f'(x)+1\}^2dx$$

$=\int_{-2}^{2} x\{f'(x)\}^2 dx+\int_{-2}^{2} 2xf'(x)dx+\int_{-2}^{2} x dx \quad \cdots ㉡$

이때 $h_1(x)=x\{f'(x)\}^2$, $h_2(x)=xf'(x)$라 하면

$h_1(-x)=-x\{f'(-x)\}^2=-x\{f'(x)\}^2=-h_1(x)$

$h_2(-x)=-xf'(-x)=xf'(x)=h_2(x)$

이므로

$\int_{-2}^{2} x\{f'(x)\}^2 dx=\int_{-2}^{2} h_1(x)dx=0$

$\int_{-2}^{2} xf'(x)dx=\int_{-2}^{2} h_2(x)dx=2\int_{0}^{2} h_2(x)dx=2\int_{0}^{2} xf'(x)dx$

또 $\int_{-2}^{2} x dx=0$이므로 ㉡에서

$\int_{-2}^{2} x\{f'(x)+1\}^2 dx=0+4\int_{0}^{2} xf'(x)dx+0=4\int_{0}^{2} xf'(x)dx$

조건 (다)에서 $4\int_{0}^{2} xf'(x)dx=32$이므로 $\int_{0}^{2} xf'(x)dx=8$

이고 ㉠에서

$\int_{0}^{2} f(x)dx=12-\int_{0}^{2} xf'(x)dx=12-8=4$

따라서

$\int_{0}^{2}\{f'(x)+f(x)\}dx=\int_{0}^{2} f'(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=\Big[f(x)\Big]_0^2+\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=f(2)-f(0)+\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=6-0+4=10$

■40. 47

조건 (나)에서 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 $f(f(x))$의 차수는 n^2이고 우변의 차수는 $n+2$이므로

$n^2=n+2$, $n^2-n-2=0$, $(n+1)(n-2)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=2$

함수 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이고, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 짝수차항 또는 상수항만 존재하므로

$f(x)=ax^2+b$ (a, b는 상수, $a>0$)이라 하자.

조건 (나)에서 양변의 차수는 모두 4이고, 좌변의 사차항의 계수는 a^3, 우변의 사차항의 계수는 $4a$이므로

$a^3=4a$에서 $a(a+2)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+b$이고 $f'(x)=4x$이므로 조건 (나)에서

$(\text{좌변})=2(2x^2+b)^2+b$

$=2(4x^4+4bx^2+b^2)+b$

$=8x^4+8bx^2+2b^2+b$

$(\text{우변})=(4x^2-3)(2x^2+b)-3\int_{1}^{x} 4t dt$

$=\{8x^4+(4b-6)x^2-3b\}-3\Big[2t^2\Big]_1^x$

$=\{8x^4+(4b-6)x^2-3b\}-6(x^2-1)$

$=8x^4+(4b-12)x^2-3b+6$

양변의 이차항의 계수와 상수항을 비교하면

$8b=4b-12$, $2b^2+b=-3b+6$

이므로 $b=-3$

따라서 $f(x)=2x^2-3$이므로

$f(5)=50-3=47$

■41. ①

원점 O와 $P(a,\ a^2-1)$에 대하여

$\overline{OP}^2=a^2+(a^2-1)^2=a^4-a^2+1=\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

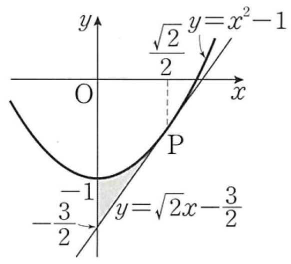
이고 $a>0$이므로 OP의 길이는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최소이고.

이때 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

$y=x^2-1$에서 $y'=2x$이므로 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$에서의 접선 l의 기울기는 $\sqrt{2}$이고

접선 l의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $y=\sqrt{2}x-\frac{3}{2}$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{(x^2-1)-\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2}\right)\right\}dx$

$=\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}$

■42. ①

각 $t=1$과 $t=k$에서 점 P의 위치가 같으므로

$\int_{1}^{k} v(t)dt=\int_{1}^{k}(6-2t)dt$

$=\Big[6t-t^2\Big]_1^k$

$=6k-k^2-5$

$=-(k-1)(k-5)=0$

$k>1$이므로 $k=5$

따라서 점 P가 $t=1$에서 $t=5$까지 움직인 거리는

$\int_{1}^{5}|v(t)|dt=\int_{1}^{5}|6-2t|dt$

$=\int_{1}^{3}(6-2t)dt+\int_{3}^{5}(2t-6)dt$

$=\Big[6t-t^2\Big]_1^3+\Big[t^2-6t\Big]_3^5$

$=4+4=8$

■43. ③

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t=k$에서의 위치를 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하면

$f(k)=\int_{0}^{k}(4t^2-3at+a)dt=\frac{4}{3}k^3-\frac{3}{2}ak^2+ak$

$g(k)=\int_{0}^{k}(t^2+3t-2a)dt=\frac{1}{3}k^3+\frac{3}{2}k^2-2ak$

$h(k)=f(k)-g(k)$라 하면

$h(k)=\left(\frac{4}{3}k^3-\frac{3}{2}ak^2+ak\right)-\left(\frac{1}{3}k^3+\frac{3}{2}k^2-2ak\right)$

$=k^3-\frac{3}{2}(a+1)k^2+3ak$

$h'(k)=3k^2-3(a+1)k+3a=3(k-1)(k-a)$

$h'(k)=0$에서 $k=1$ 또는 $k=a$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|h(k)|$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리가 8이 되도록 하는 모든 양수 k의 개수가 4이려면

$k>0$이 때 방정식 $|h(k)|=8$의 서로 다른 실근의 개수가 4이어야 한다.

$a>1$이므로 삼차함수 $h(k)$는 $k=1$에서 극대, $k=a$에서 극소가 되고

$h(1)=1-\frac{3}{2}(a+1)+3a=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}$

$h(a)=a^3-\frac{3}{2}(a+1)a^2+3a^2=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2$

$k>0$일 때, 방정식 $|h(k)|=8$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 함수 $y=|h(k)|$의 그래프와 직선 $y=8$이 접해야하고,

$|h(1)|=8$인 경우와 $|h(a)|=8$인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $|h(1)|=8$인 경우

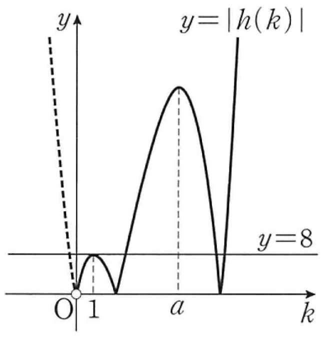
$|h(1)|=8$이고 $h(1)>0$이므로

$h(1)=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}=8$에서 $a=\frac{17}{3}$

이때

$h(a)=h\left(\frac{17}{3}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{17}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\times\left(\frac{17}{3}\right)^2=-\frac{1156}{27}$

에서 $|h(a)|>8$



$k>0$일 때, 함수 $y=|h(k)|$의 그래프와 직선 $y=8$의 서로 다른 교점의 개수는 4이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $|h(a)|=8$인 경우

$|h(a)|=8$이고 $h(a)<0$이므로

$h(a)=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2=-8$에서

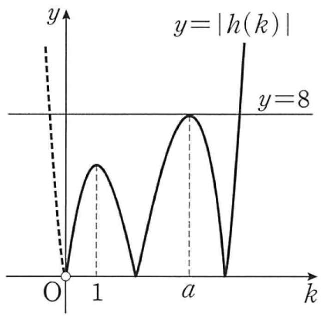
$a^3-3a^2-16=0$

$(a-4)(a^2+a+4)=0$

$a=4$

$h(1)=\frac{3}{2}\times4-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

에서 $|h(1)|<8$



$k>0$일 때, 함수 $y=|h(k)|$의 그래프와 직선 $y=8$의 서로 다른 교점의 개수는 2이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{17}{3}$