규토 라이트 N제

CONTENTS

규토 라이트 N제 오리엔테이션

문제편

| 지수함수와 로그함수 |

| 삼각함수 |

CONTENTS

| 수열 |

해설편

CONTENTS

| 수열 |

오리엔테이션

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

---

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과 개념, 실전 개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.
단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

---

2. **T**raining – 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여
수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

---

3. **T**raining – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

---

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도
1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야 하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

단순히 유형서가 아니라 생기초부터 점점 살을 붙여가며 기출킬러까지 다루는 올인원 교재입니다.
즉, 교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 라이트 N제 수1의 경우 총 852제이고
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당 과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야 할지 갈피를 못 잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

검토후기

문지유 / 울산대학교 의학과

2024 규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Traning – 1Step), 단원별 역대 기출들(Training – 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.
벌써 제가 규토 N제 교재 검토를 한지도 3년차에 접어들었네요. 최대한 꼼꼼히 검토하는 편인데도 항상 놓치는 게 있을까 떨리네요. 2023년 새해가 밝아 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

김태민 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 울산대학교 의예과에 20학번으로 입학하여 의학과 2학년에 재학 중인 김태민입니다. 작년에 이어 올해도 검토를 맡게 되었는데요. 저의 N수 경험, 학원 조교 경험, 작년 문제집 검토 경험들을 통해 쌓아온 노하우를 바탕으로 수험생 여러분들에게 도움이 될 수 있도록 꼼꼼히 검토했습니다. 규토 라이트 N제 문제집을 검토할 때마다 가장 인상 깊은 점은 질 좋은 문제들과 난잡하지 않은 해설인 것 같아요. 현재 수능체제에 가장 적합한 문제들을 통해 여러분을 훈련시키고 해설을 통해 조심해야 하는 부분은 어디인지, 어떻게 문제를 접근해야 하는지 여러분에게 수능 수학 공부의 방향성을 제시합니다. 이 교재에 있는 문제들과 문제풀이를 반복 학습하면서 체화해 나가는 과정이 도움이 될 것이라 확신합니다. 이 책이 출판될 시점이면 본격적으로 새로운 마음으로 수험생 여러분들이 공부를 시작하는 단계일텐데요. 수능까지 충분히 많이 남았기에 너무 조급한 마음보다는 여유를 가지고 기본부터 잘 다듬어 가시길 바랍니다. 이 교재를 거쳐간 모든 수험생 여러분들에게 좋은 기운이 닿기를 항상 응원하겠습니다!

정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 벌써 한 해의 입시가 끝나가고, 완연한 겨울이 되었네요. 입시가 끝나자마자 새로운 문제집이 출판되고, 풀린다는 생각을 하니 저자분의, 수험생들의 열의가 느껴지는 것만 같습니다.
규토 라이트 N제 수학1에는 수학1 문항들을 어떻게 대해야 하는지, 그 방법들이 상세하게 설명되어 있습니다. 또한 엄선된 기출문제, 좋은 퀄리티의 자체 제작 문항이 더해져 문항 수, 문항 퀄리티 모두 훌륭합니다. 문항을 푸는 방법을 가르쳐주고, 풀이 방법을 연습해서 수학 실력을 늘릴 수 있는 발판까지 마련해 주는 문제집이라고 생각합니다. 가볍게 풀고 넘기는 문제집으로 활용하기 보다는, 본문과 해설의 내용까지 상세히 살펴서 책에 담긴 모든 내용을 얻어가시면 좋겠습니다.
과정은, 결과로 미화된다는 생각을 종종 합니다. 여러분의 올 한해 수험 생활은 분명 쉽지 않을거에요. 공부의 스트레스, 불안감, 많은 것들이 여러분을 괴롭힐 것 같습니다. 하지만 올 한해가 끝났을 때, 그 모든 과정이 좋은 기억으로 남을 수 있을 만큼 좋은 결과를 얻을 수 있으시기를 기원합니다. 감사합니다.

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.
기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 기출 문제가 부족한 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 활용 단원에서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제 만의 큰 장점이라고 생각합니다.
저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 수능 수학 영역이 수 1, 2 공통영역과 선택영역으로 분리된 지 어느덧 2 년이 지났습니다. 이전 수능과 달리 최근에는 준킬러 수준 이상의 문제들이 많아졌습니다. 어려운 문제들이 많아진 만큼 수험생들의 부담감도 당연히 커졌습니다. 즉, 긴장되는 시험장 안에서 ‘멘탈’ 싸움이 중요해졌습니다. 이러한 ‘멘탈’ 싸움에서 극복해내려면 컨디션 관리와 자기 페이스 유지도 중요하지만 무엇보다도 어렵고 처음 보는 문제를 보았을 때 당황하지 않고 차근차근 풀어가는 능력이 있어야 합니다. 규토 라이트 N제 시리즈는 이러한 능력을 기르게 해주는 문제집입니다. Training 1 Step에서 저자가 최신 수능 트렌드를 분석하면서 만든 자작문제들을 통해 실력을 기를 수 있고, 2 Step에서 기른 실력을 기출문제에 바로 적용할 수 있습니다. 문제의 난이도가 절대 쉽지만은 않지만, 저자의 100% 공부법을 통한 꾸준한 반복과 복습을 하면, 어느새 준킬러 수준 이상의 문제들을 술술 푸는 자신을 발견할 겁니다. 올해 수험생 여러분 모두 건승을 기원합니다!

규토 라이트 N제와 함께 1년 내내 수학 모의고사 1등급!! (김준한)

-4등급부터 시작해서 현재 수학 백분위 99%까지 달성 후기-

안녕하세요~ 저는 작년 고1 때는 모의고사 성적이 3, 4등급에 머물러 있다가 올해 규토 라이트 N제 수1, 2로 공부하면서 2022년에 시행된 고2 6, 9, 11월 모의고사에서 모두 1등급을 쟁취하게 되어 추천사를 작성하게 되었습니다. 제가 이 책을 처음 접했을 때 책의 구성도 물론 좋았지만 가장 눈에 들어온 것은 공부법이었습니다. 성적대가 낮은 학생들이 공부해도 큰 효과를 볼 수 있는 책이지만 평소에 수학 공부법에 회의감을 가지고 있는 학생들도 공부하면 더 큰 효과를 볼 수 있을 거라고 생각합니다!

고등학교 1학년 때의 저는 수학을 아주 잘하지도 못 하지도 않는 학생이었습니다. 단지 다다익선이라는 말처럼 시중에 나와 있는 문제집을 다 풀어 보며 성적이 잘 나오겠지하며 기대하는 학생에 불과했습니다. 그랬던 성적이 3등급이었고 저는 심각한 고민에 빠졌습니다. 그러던 도중에 한 커뮤니티 사이트에서 '규토 라이트 N제' 후기를 보았습니다. 후기를 읽어보며 나도 저런 드라마틱한 성장을 이뤄낼 수 것 같다는 느낌을 받았고 그 중심인 '100% 공부법'을 알게 되어 바로 책을 구입하게 되었습니다.

규토 라이트 N제를 보면서 구성이 참 놀라웠습니다. 현 교육과정에 따른 개념이 모두 수록되어 있을 뿐만 아니라 규토님 특유의 테크니컬한 팁들이 다 들어 있어서 자작문제 (t1)에 적용하여 체화를 시키고 이에 따라 배운 것들을 기출문제 (t2)에 또 적용할 수 있어 개념-기출의 괴리감을 최소화 시켜준다는 장점이 있습니다. 그리고 규토 라이트 N제의 고난도 문제의 집합이라고 할 수 있는 마스터 스텝 (mt) 인데 저는 개인적으로 푸는 데 너무 재밌었습니다. 저는 문제를 풀면서 규토쌤이 괜히 문제 배치를 마지막에 하신 게 아니구나라는 것을 느꼈습니다. 이 문제들은 약간 방금 전에 언급한 t1, t2 문제들을 믹스 시킨 문제, 즉 기본 예제 들의 집합이라고 느꼈습니다. 마스터 스텝 문제까지 책의 공부법으로 완전히 흡수시켜야 비로소 책의 취지에 맞게 안정적인 1등급에 도달한다고 느끼게 되었습니다.

이제 공부법에 대해 얘기해보려 합니다. 사실 제가 제일 강조하고 싶은 부분입니다!! 제 성적향상의 근원이기도 합니다ㅎ 올해 3월달... 저의 수학 성경책을 받은 날이었죠..저는 책과 물아일체가 되겠다는 마음가짐으로 임했습니다. 규토 선생님께서 강조하시는 수학 공부법이 처음에는 어색했지만 계속 적용해보니까 수능 수학에 가장 이상적이고 적합한 방법이라는 것을 깨달았습니다. 제가 세 번의 모의고사에서 1등급을 받은 그 공부법! 100% 공부법의 핵심은 "누군가에게 설명할 수 있다" 입니다. 사실 혹자께서는 문제를 잘 푸는 거랑 어떤 차이냐고 물으실 수 있는데 사실은 엄청난 차이가 있다고 생각합니다. 문제를 완벽하게 설명하려면 풀이를 써 내려갈 때 개념 간의 논리를 정확하게 이해하고 남을 이해시킨다는 마음으로 문제를 정확히 자기것으로 만들어야 합니다. 저는 이 과정이 정말 힘들었습니다. 하지만, 계속 거듭하고 묵묵히 하다보니 가속도가 붙더라고요! 내년에 공부하실 2024 규토 수험생 분들도 이 부분을 강조하며 공부하시면 충분히 좋은 결과 있으실 거라고 믿습니다!!

마지막으로 규토 선생님! 제 수학 성적을 눈부시게 끌어올려 주셔서 감사합니다! ㅎㅎ

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

–규토 N제 수1,수2,미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기–

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제'입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신 있게 추천드립니다.
[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(쎈)과 규토 라이트N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제(30번)까지 모두 다룹니다. 과장 없이 미적분 2022평가원 문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주시는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사설 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데요, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같게 느껴질 때 비로소 이해한 것'이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1, 2학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해봐야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까.교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에선 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됬고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제양과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.
개념익히기와 〈1 step〉 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.
다음으로는 제가 가장 애정했던 〈2 step〉 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니다. 하지만 이 단계부턴 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 〈2 step〉만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리하실 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. 〈2 step〉를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.
끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘드신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다. 코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다. 많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, "이 책을 공부하는 방법(?)"이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다. 규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갉아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했었던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.
책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.
늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

지수함수와 로그함수

Guide step

개념 익히기편

1. 지수

01 거듭제곱과 거듭제곱근

성취 기준 | 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

개념 파악하기 (1) 거듭제곱과 거듭제곱근이란 무엇일까?

거듭제곱

실수 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고, 기호로 a^n과 같이 나타낸다.
또 a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고,
a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

중학교에서 배운 내용 복습

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$

④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

⑤ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

Tip ②번에서 $(a^m)^n \neq a^{m^n}$ 임을 유의하자. ex $(a^2)^3 = a^6$, $(a^2)^3 \neq a^8$

개념 확인문제 1

a, b가 0이 아닌 실수일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^2b^3)^4 \times a^3$

(2) $a^3b^5 \div ab^2$

(3) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \times \left(\dfrac{b^2}{a}\right)^3$

거듭제곱근

제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$를 만족시키는 수 x를 a의 제곱근이라고 하고,
세제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^3=a$를 만족시키는 수 x를 a의 세제곱근이라고 한다.

일반적으로 n이 2 이상의 정수일 때, n제곱하여 실수 a가 되는 수,
즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라 한다.

또한 a의 제곱근, a의 세제곱근, $\cdots$, a의 n제곱근, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

Tip 1 '방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근'이라는 문장전체를 암기하는 것을 추천한다.

Tip 2 방정식 $x^n=a$의 해 개수는 복소수의 범위에서 n개다.

ex $x^3=1$을 만족시키는 x는 $x=1$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

이처럼 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 존재한다.

예제 1

-27의 세제곱근을 모두 구하시오.

풀이

-27의 세제곱근을 x라 하면 방정식 $x^3=-27 \Rightarrow x^3+27=0 \Rightarrow (x+3)(x^2-3x+9)=0$ 이므로
$x=-3$, $x=\dfrac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

Tip1 a의 n제곱근을 x라고 하면 $x^n=a$임을 이용하여 x의 값을 구한다.
즉, 먼저 x에 대한 방정식을 세우고 난 뒤 방정식을 푸는 형태로 접근한다.

Tip2 -27의 세제곱근 중 실수인 것은? 이라고 물어보지 않았기 때문에 복소수도 따져줘야 한다.

개념 확인문제 2

다음 거듭제곱근을 모두 구하시오.

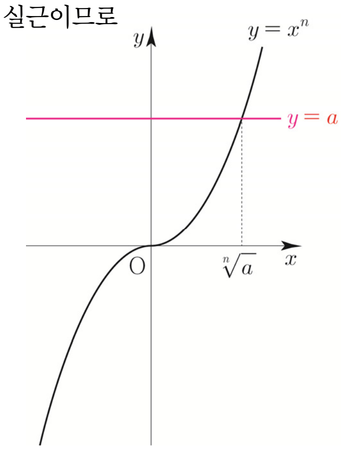
(1) -8의 세제곱근

(2) 16의 네제곱근

지수함수와 로그함수

실수인 거듭제곱근

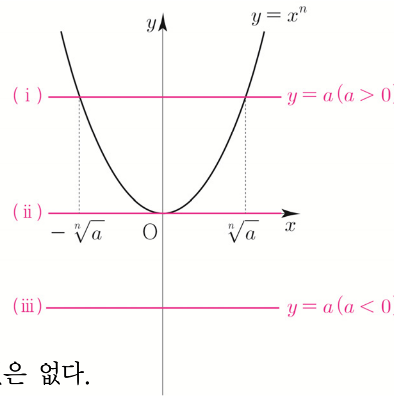
실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 구해보자.
n이 2 이상의 정수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.



① n이 홀수일 때

임의의 실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다. (기함수)
이때 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점은 실수 a의 값에 관계없이 항상 한 개다.
따라서 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나 존재하고,
이것을 기호로 $\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

② n이 짝수일 때



임의의 실수 x에 대하여 $(-x)^n=x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다. (우함수)
함수 $y=x^n$와 직선 $y=a$의 교점은 실수 a의 값에 따라 달라진다.
(i) $a>0$이면 교점은 두 개이고, 두 교점의 x좌표는 각각 양수와 음수이다.
따라서 a의 n제곱근 중에서 양의 실수인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음의 실수인 것을 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.
(ii) $a=0$이면 교점은 한 개이고, 교점의 x좌표는 0이다.
따라서 0의 n제곱근은 0 하나뿐이고, $\sqrt[n]{0}=0$이다.
(iii) $a<0$이면 교점이 존재하지 않는다. 따라서 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것

a가 실수이고 n이 2 이상의 정수일 때

구분	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

Tip 1 $\sqrt[n]{a}$는 n제곱근 a라 읽는다.

Tip 2 $\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

Tip 3 a의 n제곱근과 n제곱근 a를 헷갈리지 않도록 유의하자. (★완벽히 이해하고 넘어갈 것!★)
ex1 4의 제곱근 : $x^2=4 \Rightarrow x=2$ or $x=-2$ ex2 제곱근 4 : $\sqrt{4}=2$

개념 확인문제 3

다음의 값을 구하시오.

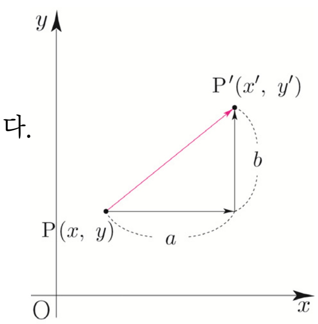
(1) $\sqrt[3]{-27}$ (2) $\sqrt[4]{16}$ (3) $-\sqrt[5]{32}$

01 함수 그리기 기초

성취 기준 | 평행이동과 대칭이동의 의미를 이해하고 이를 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있다.
절댓값 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (1) 평행이동한 점의 좌표와 도형의 방정식은 어떻게 구할까?

점의 평행이동



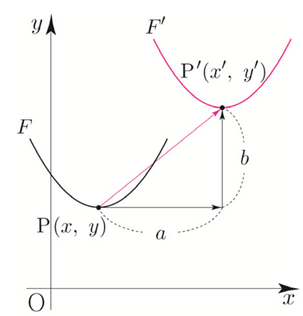
좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 $x'=x+a,\ y'=y+b$이므로 P'의 좌표는 $(x+a,\ y+b)$이다.

ex 점 $(3,\ 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 점 $(3-1,\ 1+2)$, 즉 점 $(2,\ 3)$이다.

도형의 평행이동

방정식 $y=2x+4$은 직선을 나타내고, 방정식 $x^2+y^2=1$은 원을 나타낸다. 이들을 각각 $2x-y+4=0$, $x^2+y^2-1=0$으로 나타낼 수 있는 것처럼 방정식 $f(x,\ y)=0$은 좌표평면 위의 도형을 나타낸다.
좌표평면 위의 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형 F'의 방정식을 구하여 보자.

[1단계] 점의 좌표 나타내기
도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하자.



[2단계] 두 점 사이의 관계식 구하기
점 P'의 좌표를 $x,\ y$를 이용하여 나타내면 $x'=x+a,\ y'=y+b$이므로
$x=x'-a,\ y=y'-b$이다.

[3단계] 도형의 방정식에 대입하기
$f(x,\ y)=0$에 $x=x'-a,\ y=y'-b$를 대입하면 $f(x'-a,\ y'-b)=0$이다.
따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$이 나타내는 도형 위의 점이므로
이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

ex 방정식 $y=2x$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y+2=2(x-3)$, 즉 $y=2x-8$이다.

Tip $f(x'-a,\ y'-b)=0$이 $f(x-a,\ y-b)=0$로 변한 것에 대해 다소 낯설게 느낄 수도 있는데 이는 도형의 방정식을 나타낼 때 일반적으로 문자 $x,\ y$를 사용하기 때문에 $x',\ y'$를 각각 $x,\ y$로 바꾸어 쓴 것일 뿐이다.

개념 파악하기 (4) 절댓값 함수의 그래프는 어떻게 그릴 수 있을까?

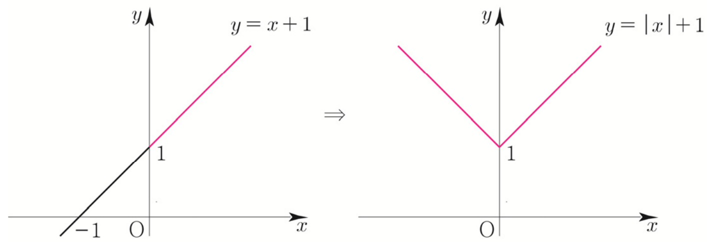
절댓값 함수 그리기 (기본 유형편)

① $y=f(|x|)$

$$\begin{cases} y=f(x) & (x \geq 0) \\ y=f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

방법 : x가 양수인 부분을 y축 대칭

ex $y=|x|+1$

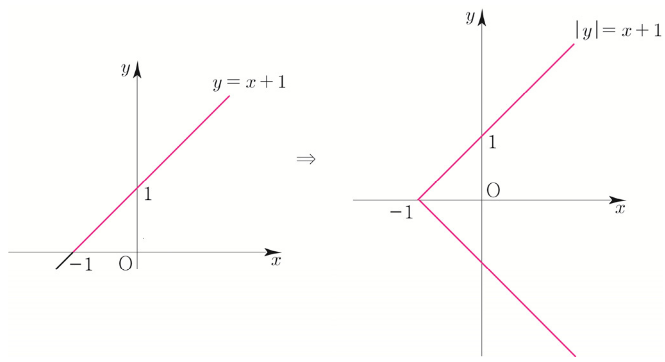


② $|y|=f(x)$

$$\begin{cases} y=f(x) & (y \geq 0) \\ y=-f(x) & (y<0) \end{cases}$$

방법 : y가 양수인 부분을 x축 대칭

ex $|y|=x+1$

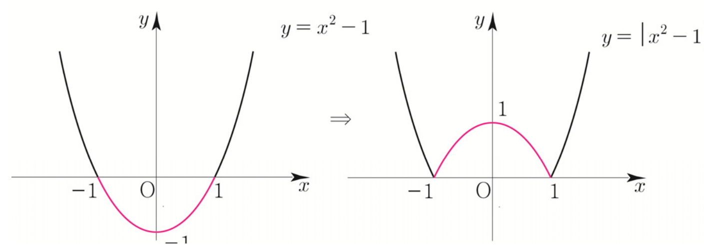


③ $y=|f(x)|$

$$\begin{cases} y=f(x) & (f(x) \geq 0) \\ y=-f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

방법 : $f(x)$가 음수인 부분을
x축 위로 접어올림

ex $y=|x^2-1|$

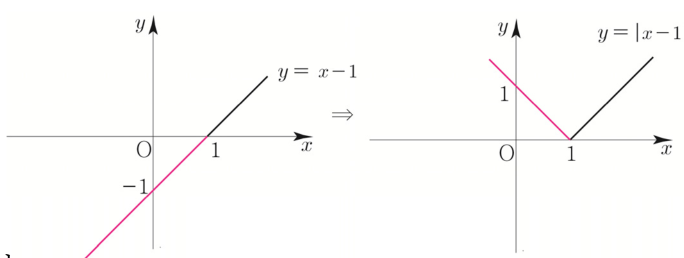


절댓값 함수 그리기 (실전 적용편)

① 무엇을 기본함수로 둘까?
② 배운 것을 바탕으로 순서를 설계하자!

ex $y=|x-1|$

① $y=x-1$를 기본함수로 두자.
② $y=|f(x)|$를 적용시키면 $y=|x-1|$이 된다.



다르게도 풀어보자.
① $y=x$를 기본함수로 두자.
② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면 $y=|x|$이 된다.
③ $x \rightarrow x-1$ (x축 방향으로 1만큼 평행이동) 하면 $y=|x-1|$이 된다.

개념 확인문제 3

다음 그래프를 그리시오.

(1) $y=|x|-1$

(2) $y=||x|-1|$

(3) $|y-1|=x-1$

(4) $y=x^2+|x|+1$

절댓값 함수 그리기 (case분류 유형)

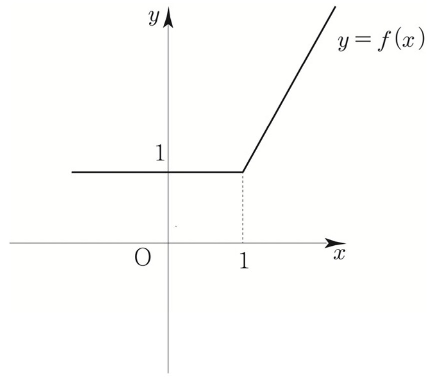
모든 절댓값 함수는 절댓값 안에 있는 식이 양수인지 음수인지에 따라 case분류하면 다 풀 수 있다.

(1) 범위가 2개인 경우

ex $f(x)=|x-1|+x$

① 절댓값이 걸려있는 식은 $x-1$ 뿐이므로
$x-1\geq0$인지 $x-1<0$인지에 따라 case분류할 수 있다.

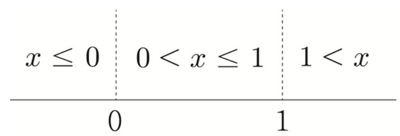
② $f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\geq1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$



Tip $x\geq1$일 때 $x-1$은 양수이므로 그냥 나온다. 따라서 $y=x-1+x=2x-1$이다.
$x<1$일 때 $x-1$은 음수이므로 마이너스가 붙어서 나온다. 따라서 $y=-(x-1)+x=1$이다.
$x=1$일 때 등호는 $x\leq1$이든지 $x\geq1$이든지 상관없다.

(2) 범위가 3개 이상인 경우

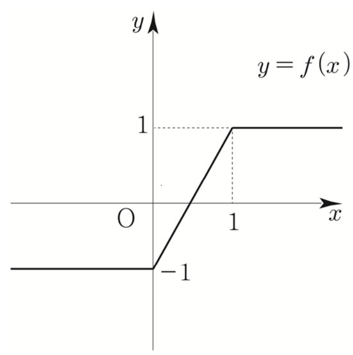
ex $f(x)=|x|-|x-1|$



① 절댓값이 걸려있는 식은 x, $x-1$ 이므로
$x\leq0$인지 $0<x\leq1$인지 $1<x$에 따라 case분류할 수 있다.

Tip 절댓값을 포함하는 식에서 절댓값이 0이 되는 x값이 0, 1 이므로 수직선을 그리고
$x=0$, 1에서 칸막이를 치면 범위가 3가지로 구분됨을 쉽게 알 수 있다.

② $f(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\ 2x-1 & (0<x\leq1)\\ -1 & (x\leq0)\end{cases}$



개념 확인문제 4

다음 그래프를 그리시오.

(1) $y=|x|+x$

(2) $y=|x|+|x-1|$

02 지수함수의 뜻과 그래프

성취 기준 | 지수함수의 뜻을 안다.
지수함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

개념 파악하기 (5) 지수함수란 무엇일까?

지수함수의 뜻

$a>0$ 이고 $a \neq 1$ 이면 x가 임의의 실수일 때, a^x의 값은 하나로 정해지므로 $y=a^x$은 x에 대한 함수라 할 수 있다. 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y=a^x\,(a>0,\ a \neq 1)$을 a을 밑으로 하는 **지수함수**라 한다.

Tip 지수함수 $y=a^x$에서 $a=1$이면 $y=1$(상수함수)가 되므로 지수함수는 $a \neq 1\,(a>0)$인 경우만 생각한다.

개념 확인문제 5

다음 중에서 지수함수인 것을 모두 찾으시오.

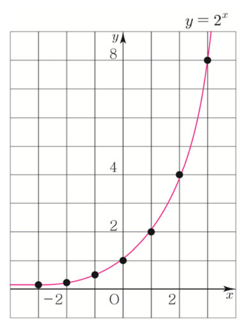
(1) $y=x^4$ (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (3) $y=2^{-2x}$ (4) $y=x^{-1}$

개념 파악하기 (6) 지수함수의 그래프는 어떻게 그릴까?

지수함수의 그래프

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 그려보자. 실수 x의 여러 가지 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$



$x,\ y$의 값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고,
이를 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프를 얻는다.
이 함수의 그래프에서 다음을 알 수 있다.

① 지수함수 $y=2^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
② 지수함수 $y=2^x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
③ 지수함수 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x의 값이 한없이 작아지면 y의 값은 0에 한없이 가까워지므로 x축을 점근선으로 갖는다.

Tip 그래프가 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 그래프의 점근선이라고 한다.

1 Theme 지수함수의 함숫값과 성질

001

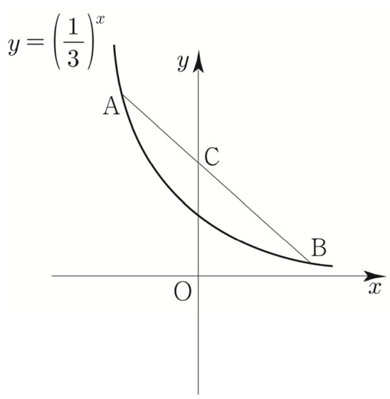
두 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=a\times 2^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 8)$, $(b,\ 64)$을 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오.

002

함수 $f(x)=3^{ax+b}$에서 $f(1)=9$, $f(3)=27$일 때, $f(a+3b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

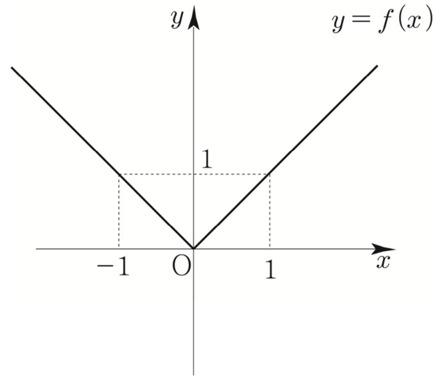
003

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프 위의 한 점 A의 y좌표가 9이다. 이 그래프 위의 한 점 B에 대하여 직선 AB와 y축과의 교점을 C라 할 때, $2\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CB}}$이다. 점 B의 y좌표를 구하시오.



004

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때,



다음 〈보기〉 중 함수 $g(x)=2^{-f(x)}$의 그래프에 관한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(0)$이다.
ㄷ. x축을 점근선으로 갖는다.
ㄹ. 치역은 $\{y\,|\,0<y\le 1\}$이다.
ㅁ. $0<x<1$일 때, x값이 증가하면 y의 값은 증가한다.
ㅂ. $g(x_1)=g(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.
ㅅ. 임의의 양수 k에 대하여 방정식 $g(x)=\frac{1}{k+1}$은 항상 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

2 Theme 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

005

함수 $y=5^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동 한 후 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식이 $y=5^{ax+b}+c$일 때, $a+b+c$의 값은?

006

함수 $y=3^{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=27\times3^{3x}+5$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값을 구하시오.

007

좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프가 점 (3, 8)를 지난다. 양수 a의 값을 구하시오.

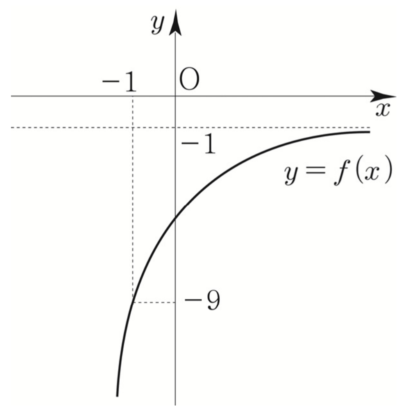
008

다음 〈보기〉 중 함수 $f(x)=3^{2x-1}+1$의 그래프에 관한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이다.
ㄴ. $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
ㄷ. $y=9^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄹ. $x_1\neq x_2$ 이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.
ㅁ. $y=1$을 점근선으로 갖는다.

009

지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, -9)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



010

두 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=27\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

Training – 2 step

기출 적용편

3. 지수함수와 로그함수

058 | 2019년 고3 3월 교육청 가형

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$의

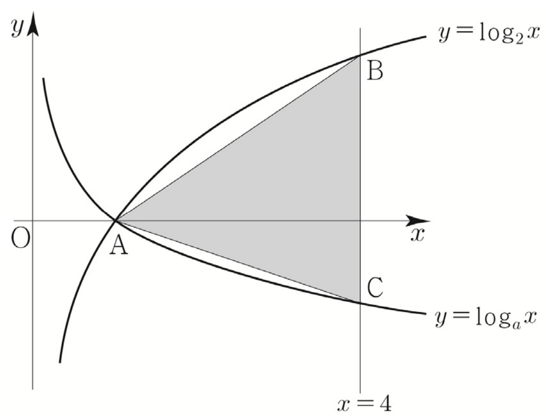
최댓값은 27, 최솟값은 m이다. $a\times m$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.) [3점]

059 | 2020년 고3 3월 교육청 나형

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x\ (0<a<1)$이 x축 위의 점 A에서 만난다. 직선 $x=4$가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점 B, 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 상수 a의 값은? [3점]



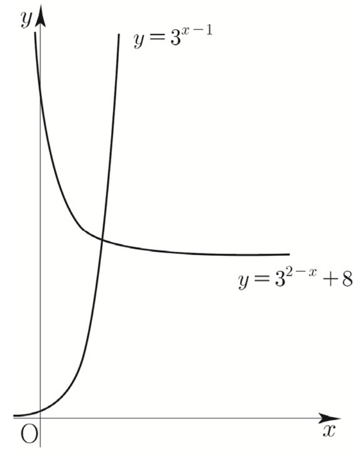
① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{3}{16}$

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{5}{16}$

060 | 2020년 고3 10월 교육청 나형

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 곡선 $y=3^{2-x}+8$과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자.

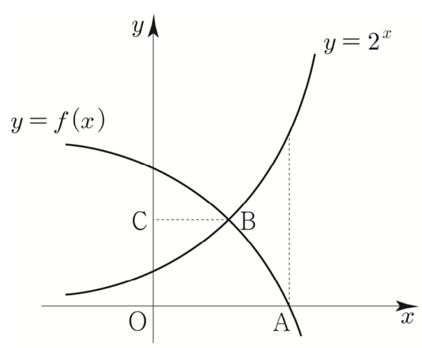
직선 $x=t+1$이 x축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{x-1}$과 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABCD가 직사각형일 때, 이 사각형의 넓이는? [3점]



① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

061 | 2014학년도 수능예비시행 B형

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $m>2$이다.)



곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자.

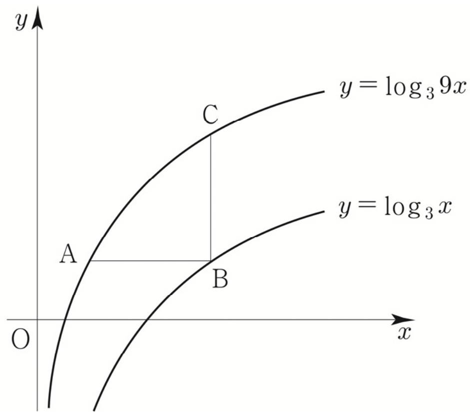
$\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$

④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

070 | 2019학년도 사관학교 가형

곡선 $y=\log_3 9x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 9x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $a+3^b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

071 | 2020년 고3 7월 교육청 가형

두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ g(b))$의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

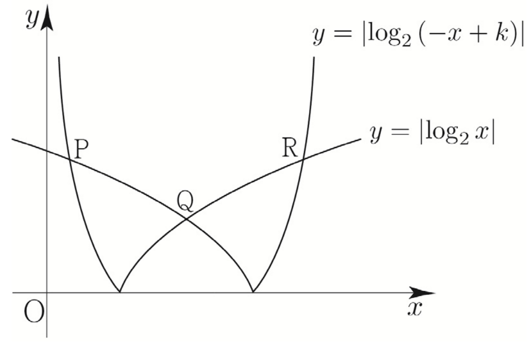
① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ 4
④ $2\sqrt{5}$　⑤ $2\sqrt{6}$

072 | 2022학년도 사관학교 공통

함수 $f(x)=\log_2 kx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(5)$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이고, O는 원점이다.) [3점]

073 | 2021년 고3 10월 교육청 공통

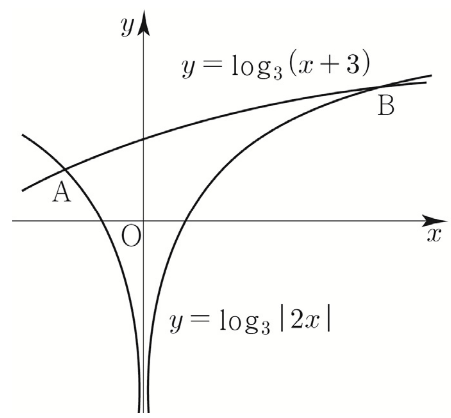
2보다 큰 상수 k에 대하여 두 곡선 $y=|\log_2(-x+k)|$, $y=|\log_2 x|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$) [3점]



① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4
④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$

074 | 2020년 고3 3월 교육청 가형

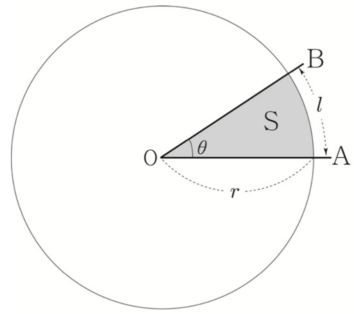
함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



① $\frac{13}{2}$　② 7　③ $\frac{15}{2}$　④ 8　⑤ $\frac{17}{2}$

부채꼴의 호의 길이와 넓이

호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구해보자.



오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l, 부채꼴 OAB의 넓이를 S라 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$l \ : \ 2\pi r = \theta \ : \ 2\pi \ \Rightarrow l = r\theta$

부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 비례하므로

$S \ : \ \pi r^2 \ = \ \theta \ : \ 2\pi \ \Rightarrow S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r \times r\theta = \frac{1}{2}rl$

부채꼴의 호의 길이와 넓이 요약

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l = r\theta$, $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

Tip 1 중심각의 크기 θ의 단위는 **라디안**임에 유의한다. 즉, 중심각이 60°이면 $\theta = \frac{\pi}{3}$라고 써야 한다.

Tip 2 **〈왜 호도법을 사용할까?〉**

지금까지 육십분법을 쓰면서 딱히 불편한 적도 없었고 30°, 45°, 60°와 같이 직관적이고 쉬운데 왜 굳이 호도법을 사용할까?

중학교 때 배운 삼각비는 직각삼각형의 빗변, 밑변, 높이의 비로 정의하였지만 고등학교에서는 이를 확장하여 삼각함수를 다룬다. 일반적으로 함수의 정의역은 실수이기 때문에 sin, cos, tan를 함수로 만들려면 각을 실수로 표현해야 한다. 즉, 이를 위해 도입한 것이 바로 호도법이다.

지난 tip에서 언급했듯이 각의 크기를 호도법으로 나타낼 때는 단위인 라디안을 생략하고 실수처럼 사용한다는 것이 핵심이다.

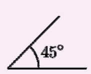
보통 단위라는 것도 연산과 동일하게 곱하거나 나누거나 하는 형태로 약속해서 표현된다.

ex 속력 $= \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$ (m/s), 넓이 $=$ 가로의 길이 $\times$ 세로의 길이 (m^2)

$\theta(\text{라디안}) = \frac{l}{r} = \frac{\text{길이}}{\text{길이}}$ 이므로 단위가 약분되어 순수한 비율, 즉 실수로 표현된다는 것을 알 수 있다.

이렇게 순수한 실수가 되었기에 함수의 정의역으로 쓰기 알맞다.

이때 "45°는 실수가 아닌가요?"라는 의문이 있을 수 있다. 45는 실수이지만 $^\circ$를 붙여서

45°라고 쓰는 순간 이정도  의 각을 나타내는 표현법에 불과하다.

물론 육십분법을 이용하여 함수를 그릴 수는 있지만 순수한 실수가 아니기 때문에 다른 그래프들과 같은 좌표평면에서 비교하여 해석할 수 없다. 따라서 실수가 정의역인 삼각함수를 만들기 위해서 호도법이라는 것을 도입한 것이다.

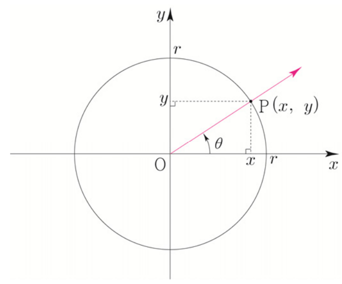
02 삼각함수

성취 기준 | 삼각함수의 뜻을 안다.

개념 파악하기 (3) 삼각함수란 무엇일까?

삼각함수의 뜻

중학교에서는 0° 에서 90° 까지의 각의 삼각비를 배웠으나, 이제 삼각비의 정의를 확장하여 일반각에 대한 함수로 정의해 보자. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면의 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 놓인 반직선을 시초선으로 잡을 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 θ라고 하자.
중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면
$\dfrac{y}{r},\ \dfrac{x}{r},\ \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나로 정해진다.
따라서 $\theta \to \dfrac{y}{r},\ \theta \to \dfrac{x}{r},\ \theta \to \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$와 같은 대응은 각각 θ의 함수이다.



Tip 〈중학교에서 배운 내용 복습 : 함수의 정의〉
두 변수 $x,\ y$에 대하여 x의 값이 정해짐에 따라 y의 값이 하나로 정해지는 대응 관계가 성립할 때, y를 x의 함수라고 한다.

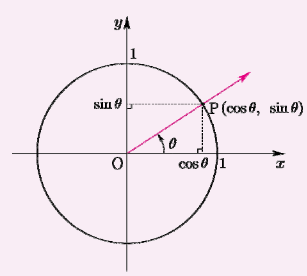
이들을 각각 θ의 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 다음과 같이 나타낸다.
$\sin\theta = \dfrac{y}{r},\ \cos\theta = \dfrac{x}{r},\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$ 이 함수들을 통틀어 θ에 대한 **삼각함수**라 한다.

삼각함수의 정의

동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta = \dfrac{y}{r},\ \cos\theta = \dfrac{x}{r},\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$

Tip 1 **일반각에 대한 삼각함수는 중학교에서 배운 삼각비의 확장이지만 직각삼각형의 변의 길이비가 아닌 함수로 다룬다는 점에서 차이가 있다.** 다시 말해 중학교에서 배운 삼각비는 닮은 직각삼각형의 예각에 대한 두 변의 길이의 비이고, 삼각함수는 삼각비를 일반각의 경우로 확장하여 정의한 것으로 일반각에서 실수로의 함수이다. 여기서 일반각을 호도법으로 나타내고, 단위를 생략하면 삼각함수는 실수에서 실수로의 함수가 된다.

Tip 2 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 단위원이라고 한다.
단위원일 때는 $\sin\theta = y,\ \cos\theta = x,\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}\ (x \neq 0)$가 됨을 기억하자.
즉, x좌표가 $\cos$이 되고 y좌표가 $\sin$이 된다.



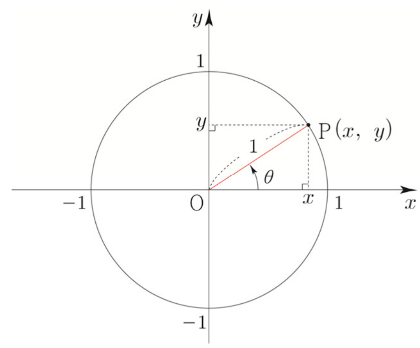
01 삼각함수의 그래프

성취 기준 | 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

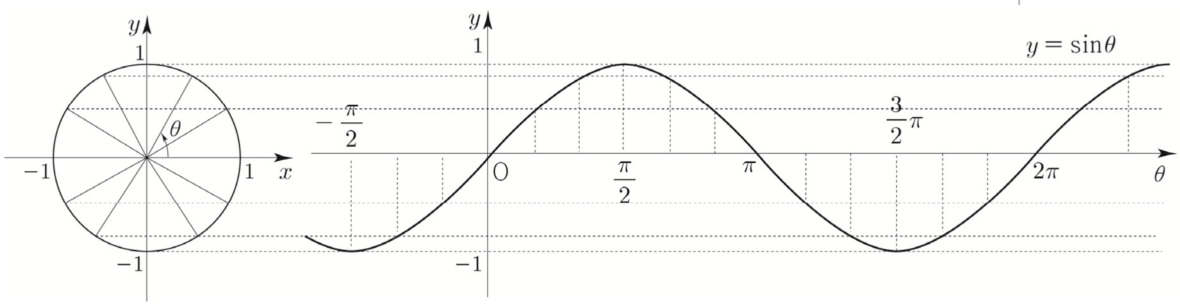
개념 파악하기 (1) 함수 $y=\sin x$의 그래프는 어떻게 그릴까?

함수 $y=\sin x$의 그래프

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 크기가 θ인 각을 나타내는 동경과 반지름의 길이가 1인 원 O의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 삼각함수의 정의에 의해서 $\sin\theta=\frac{y}{1}=y$이다.



즉, θ의 값이 변할 때, $\sin\theta$의 값은 점 P의 y좌표로 정해진다.
θ의 값을 가로축에, 그에 대응하는 $\sin\theta$의 값을 세로축에 나타내면 다음 그림과 같은 함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 얻는다.



위의 함수 $y=\sin\theta$의 그래프에서 다음을 알 수 있다.

① 함수 $y=\sin\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다.
② 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$가 성립한다. (즉, 기함수이다.)
③ 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 2π 간격으로 그 모양이 반복되므로 임의의 실수 θ에 대하여 $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$ (n은 정수) 가 성립한다.

함수의 정의역의 원소는 보통 x로 나타내므로 이제부터 θ를 x로 바꾸어 함수 $y=\sin\theta$를 $y=\sin x$로 나타내기로 하자.

함수 f에서 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 **주기함수**라 하고 p의 값 중에서 최소인 양수를 함수 f의 **주기**라 한다.

$\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \sin(x+4\pi)=\sin x,\ \sin(x+6\pi)=\sin x,\ \cdots$ 이므로
$\sin(x+p)=\sin x$를 만족시키는 최소인 양수 p는 2π이다.

따라서 함수 $y=\sin x$는 주기가 2π인 주기함수이다.

함수 $y=\sin x$의 그래프의 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.
② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\sin(-x)=-\sin x$이다. (즉, 기함수이다.)
③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\sin(x+2n\pi)=\sin x$ (n은 정수)이다.

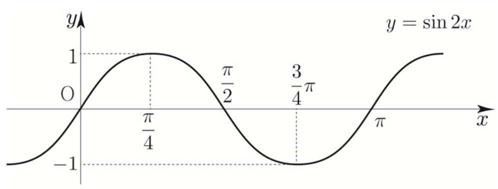
함수 $y=a\sin(bx+c)+d$

함수 $y=a\sin(bx+c)+d$에 대하여 최댓값, 최솟값, 주기는 다음과 같다.

최댓값 : $|a|+d$, 최솟값 : $-|a|+d$, 주기 : $\dfrac{2\pi}{|b|}$

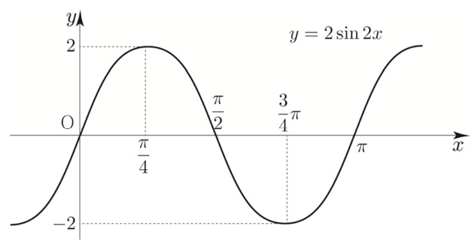
ex1 $y=\sin 2x$

최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$



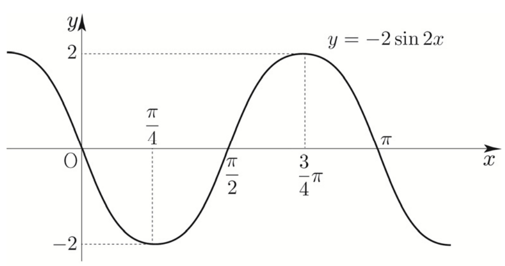
ex2 $y=2\sin 2x$

최댓값 : 2, 최솟값 : -2, 주기 : $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$



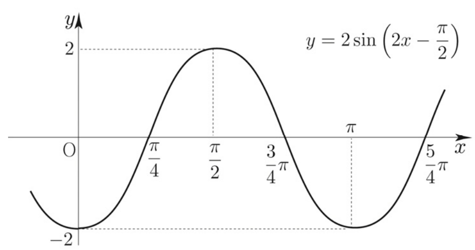
ex3 $y=-2\sin 2x$

최댓값 : 2, 최솟값 : -2, 주기 : $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$



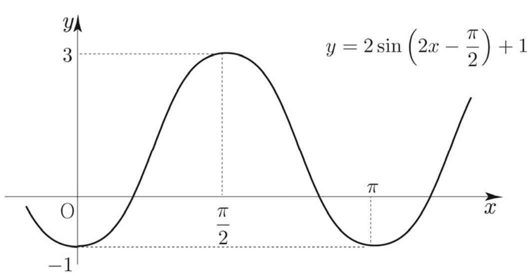
ex4 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

최댓값 : 2, 최솟값 : -2, 주기 : $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$



ex5 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$

최댓값 : 3, 최솟값 : -1, 주기 : $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$



Tip 1 $y=a\sin(bx+c)+d=a\sin\left(b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right)+d$에서 a는 확대 또는 축소($a<0$이면 x축에 대하여 대칭이동)를 담당하고 b는 주기($b<0$이면 y축에 대하여 대칭이동), c는 x축 방향의 평행이동, d는 y축 방향의 평행이동을 담당한다.

Tip 2 만약 $b<0$이면 헷갈릴 수 있으니 기함수의 성질에 의하여 $-$를 앞으로 빼고 그래프를 판단하는 것이 좋다. $b<0$인 것보다 $a<0$인 것이 더 익숙하기 때문에 실수를 줄일 수 있다.

ex $\sin(-2x)=-\sin 2x$

Tip 3 만약 $a<0$라면 최댓값은 $-a+d$이다. 관성적으로 $a+d$라고 접근하지 않도록 유의하자.

Tip 4 x가 범위로 주어진 경우에는 $\sin(bx+c)$의 최댓값과 최솟값이 달라질 수 있으니 유의하자.

ex $0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $2\sin x+1$의 최댓값을 구하시오.

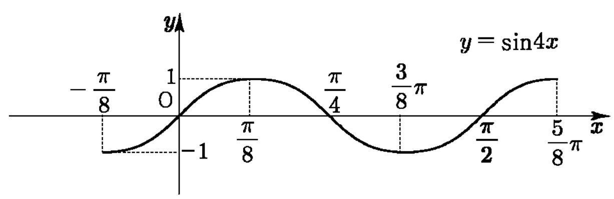
$0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $0\le\sin x\le\frac{1}{2}$이므로 $2\sin x+1$의 최댓값은 2이다. 즉, 위에 나와 있는 공식에 대입하여 관성적으로 최댓값을 $a+d=2+1=3$로 판단하지 않도록 유의하자.

예제 1

$y=\sin 4x$의 주기와 치역을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다.
주기만 조심하면 다른 부분은 고1 때 배운 평행이동과 대칭이동으로 처리해 주면 된다.
따라서 함수 $y=\sin 4x$ 의 그래프는 다음과 같다.



Tip $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프를 그리려면?

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right)$

1단계) $y=\sin 2x$의 그래프를 그린다.

2단계) $x\to x-\frac{\pi}{8}$이므로 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동한다.

개념 확인문제 1

다음 함수의 주기와 치역을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $y=-\sin x+1$ (2) $y=2\sin 2x$ (3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

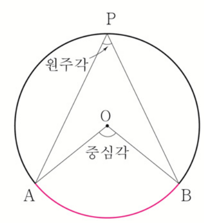
03 원주각 (중학교 3학년 복습)

성취 기준 | 원주각의 성질을 이해한다.

개념 파악하기 (4) 중심각과 원주각 사이에는 어떤 관계가 있을까?

원주각의 정의

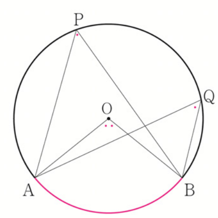
오른쪽 그림과 같이 원 O에서 호 AB 위에 있지 않은 원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{APB}$를 호 AB에 대한 **원주각**이라고 한다.
또, 호 AB를 원주각 $\angle \mathrm{APB}$에 대한 호라고 한다.



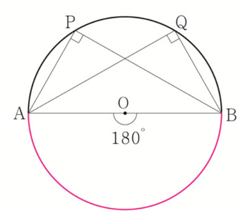
원주각과 중심각의 크기

① 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같다. 즉, $\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$

② 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다. 즉, $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$



③ 선분 AB가 원 O의 지름일 때, 호 AB에 대한 중심각의 크기는 180°이므로 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 알 수 있다.
즉, 오른쪽 그림에서 $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$



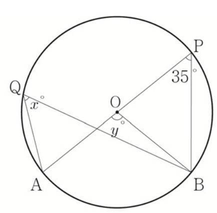
Tip 1 원주각과 중심각의 크기에 관한 성질은 사인법칙과 코사인법칙을 물어보는 문제에서 자주 출제되므로 반드시 숙지하도록 하자.

Tip 2 ③에서 $\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$라는 조건을 주고 역으로 선분 AB가 원 O의 지름임을 파악해야 하는 문제가 출제될 수도 있다.

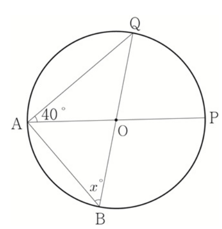
개념 확인문제 4

다음 그림에서 물음에 답하시오.

(1) x, y의 값을 구하시오.



(2) x의 값을 구하시오.

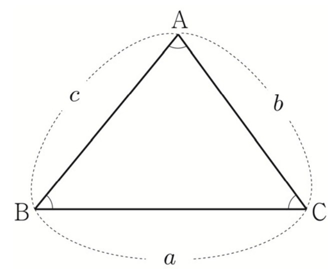


04 사인법칙과 코사인법칙

성취 기준 | 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

개념 파악하기 (7) 사인법칙이란 무엇일까?

사인법칙



오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 세 내각 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를
각각 A, B, C로 나타내고 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 하자.

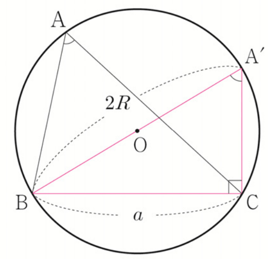
사인함수를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에 어떤 관계가
있는지 알아보자.

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 할 때, ∠A의 크기에 따라 case분류할 수 있다.

① $A<90^{\circ}$ 일 때

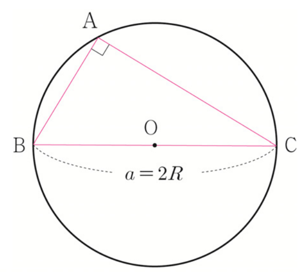
점 B를 지나는 지름의 다른 끝점을 A′이라고 하면

$A=A'$이고 ∠A′CB$=90^{\circ}$ 이므로 $\sin A=\sin A'=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\dfrac{a}{2R}$



② $A=90^{\circ}$ 일 때

$\sin A=1$, $a=2R$이므로 $\sin A=1=\dfrac{a}{2R}$



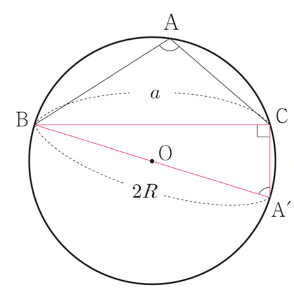
③ $A>90^{\circ}$ 일 때

점 B를 지나는 지름의 다른 끝점을 A′이라고 하면

사각형 ABA′C에서 $A=180^{\circ}-A'$이고 ∠A′CB$=90^{\circ}$ 이므로

$\sin A=\sin(180^{\circ}-A')=\sin A'=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\dfrac{a}{2R}$

따라서 ∠A의 크기에 관계없이 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ ⇒ $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ 가 성립한다.



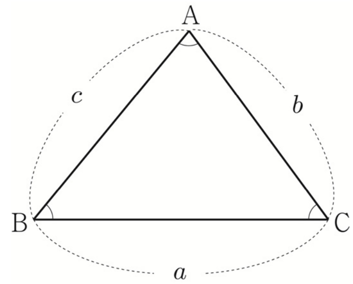
같은 방법으로 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$, $\dfrac{c}{\sin C}=2R$도 성립한다.

따라서 삼각형 ABC에서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이다.

위와 같은 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기에 대한 사인함숫값 사이의 관계를 **사인법칙**이라 한다.

개념 파악하기 (9) 삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이는 어떻게 구할까?

삼각형의 넓이



오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 세 내각 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내고 삼각형 ABC의 넓이를 S로 나타내기로 하자.

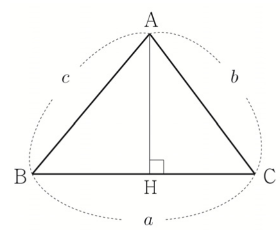
① 기본꼴

$S=\dfrac{1}{2}\times$밑변$\times$높이

② 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때

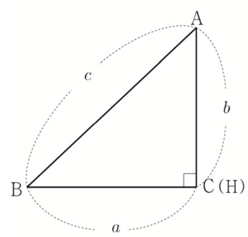
삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 밑변 BC 또는 그 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 AH의 길이를 ∠C의 크기에 따라 case분류할 수 있다.

i) $C<90^\circ$



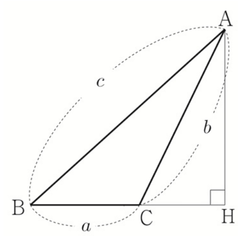
$\overline{\mathrm{AH}}=b\sin C$

ii) $C=90^\circ$



$\overline{\mathrm{AH}}=b\sin C$

iii) $C>90^\circ$



$\overline{\mathrm{AH}}=b\sin(\pi-C)=b\sin C$

따라서 ∠C의 크기와 관계없이 $\overline{\mathrm{AH}}=b\sin C$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$이다.

같은 방법으로 변 AC, 변 AB를 각각 밑변으로 생각하면 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$도 성립한다.

따라서 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

③ 세 변의 길이를 알 때

(1) 헤론의 공식 : $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (단, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

(2) 코사인 법칙$\left(\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$을 통해 $\sin A$를 구한 후 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$에 대입한다.

Tip 1 삼각형의 한 내각의 크기는 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 항상 $\sin A>0$이다.

Tip 2 헤론의 공식은 굳이 암기하지 않아도 되고 세 변의 길이를 알 때는 코사인법칙으로 처리하면 그만이다.

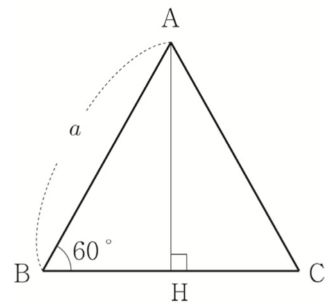
④ 한 변의 길이가 a인 정삼각형

(1) 정삼각형의 높이 $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{\mathrm{AH}} = a\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) 정삼각형의 넓이 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$



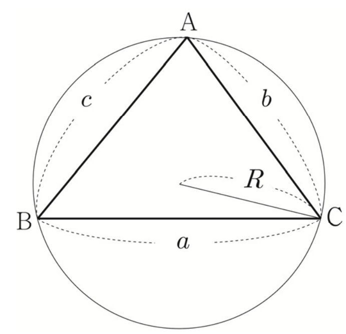
⑤ 외접원과 삼각형의 넓이

외접원의 반지름의 길이를 R이라 하고

사인법칙에 의해서 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$이므로

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}bc\dfrac{a}{2R} = \dfrac{abc}{4R}$

따라서 $S = \dfrac{abc}{4R}$



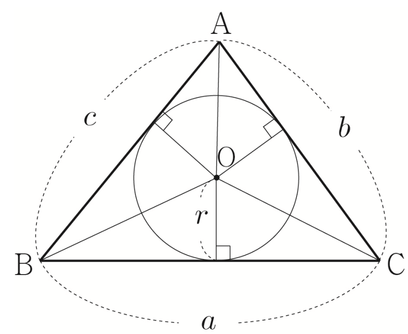
⑥ 내접원과 삼각형의 넓이

내접원의 반지름을 r이라 하고

$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{AOB} + \triangle\mathrm{AOC} + \triangle\mathrm{BOC}$이므로

$S = \dfrac{1}{2}cr + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}ar = \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right) \times r$

따라서 $S = \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right) \times r$



⑦ 삼각형의 각의 이등분선과 닮음 (자주 나오니 기억하자!)

직선 AD와 평행하고 점 C를 지나는 직선과

직선 AB이 만나는 교점을 E라 하자.

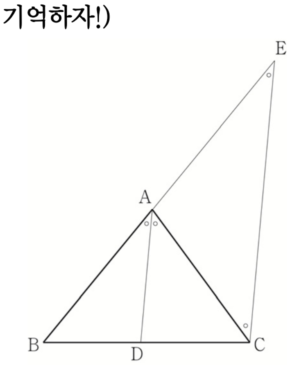
$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{ACE}$ (엇각)

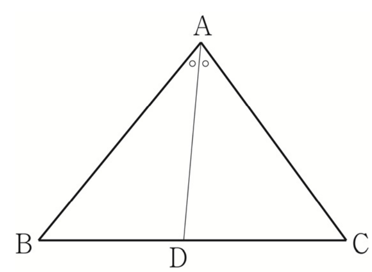
$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{AEC}$ (동위각)

$\overline{\mathrm{BA}} : \overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}$

$\angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{AEC} \Rightarrow \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AE}}$

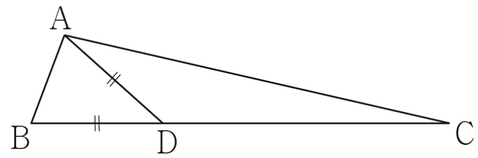
따라서 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}$





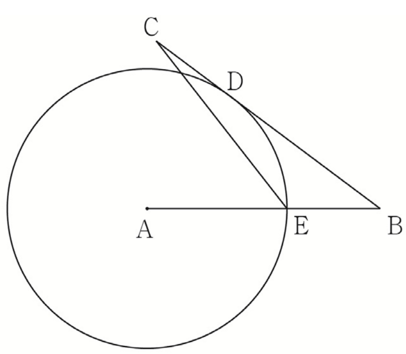
015

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AC}=4$인 삼각형 ABC가 있다.
선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하자.
$\overline{AD}=\overline{BD}$일 때, $(\overline{BC})^2$의 값을 구하시오.



016

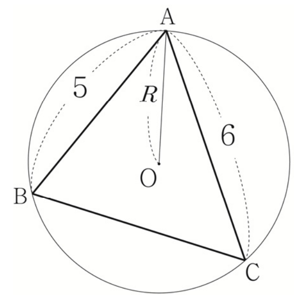
그림과 같이 길이가 5인 선분 AB와 길이가 6인 선분 BC가 있다. 점 A를 중심으로 하는 원이 선분 BC와 접하는 점을 D라 할 때, $\overline{BD}=2\overline{DC}$이다.
선분 AB와 원이 만나는 점을 E라 할 때, $(\overline{CE})^2=\frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



3 Theme 사인법칙과 코사인법칙

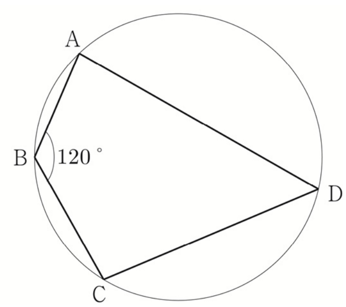
017

아래 그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$, $\cos A=\frac{1}{5}$일 때, $4\sqrt{6}R$의 값을 구하시오.



018

넓이가 13π인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다.
$3\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle ABC=120^\circ$일 때, $(\overline{AB})^2$의 값을 구하시오.



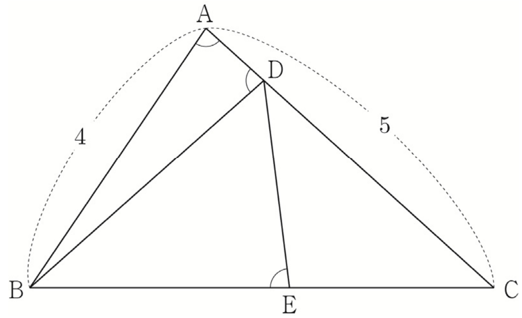
삼각함수

064 | 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



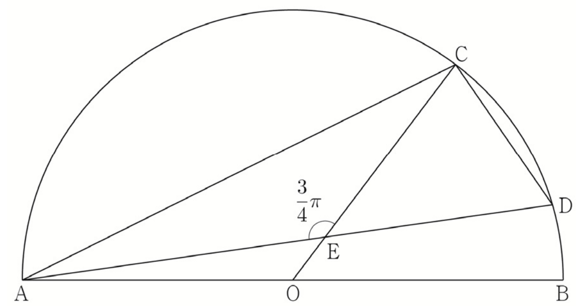
① $\frac{7}{3}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{17}{6}$　⑤ 3

065 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$　② $10\sqrt{5}$　③ $16\sqrt{2}$　④ $12\sqrt{5}$　⑤ $20\sqrt{2}$

삼각함수

Master step

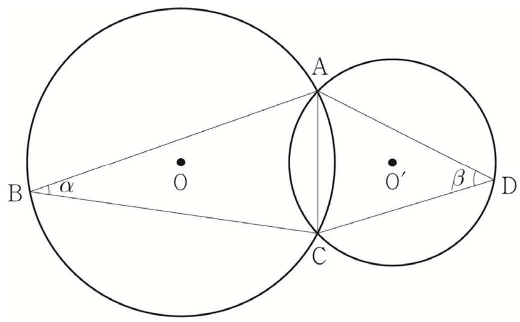
심화 문제편

3. 사인법칙과 코사인법칙

073 | 2022학년도 수능예비시행

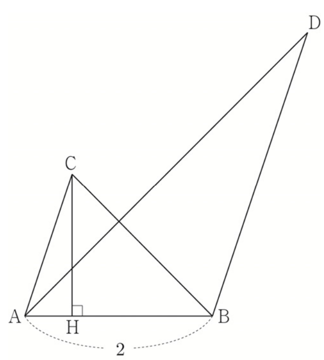
그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle \mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle \mathrm{ADC}=\beta$라 할 때, $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{OO'}}=1$이 성립한다.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



074 | 2021년 고3 3월 교육청 공통

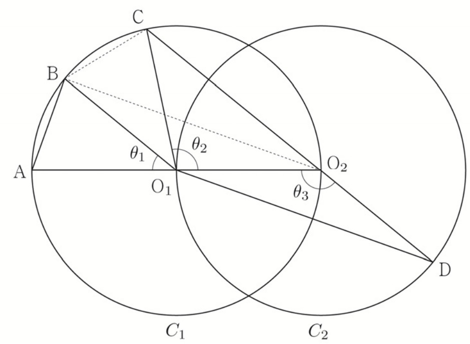
그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}\,//\,\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle \mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

075 | 2022학년도 수능 공통

두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 위에 있다. 이때 $\angle \mathrm{BO}_1\mathrm{A}=\theta_1$, $\angle \mathrm{O}_2\mathrm{O}_1\mathrm{C}=\theta_2$, $\angle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{D}=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{D}}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle \mathrm{CO}_2\mathrm{O}_1+\angle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{D}=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle \mathrm{CO}_1\mathrm{B}=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle \mathrm{O}_2\mathrm{O}_1\mathrm{B}=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{B}$와 삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_1\mathrm{D}$는 합동이다.
> $\overline{\mathrm{AB}}=k$라 할 때
> $\overline{\mathrm{BO}_2}=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{D}}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{\mathrm{AO}_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle \mathrm{BO}_2\mathrm{A}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{BC}$에서
> $\overline{\mathrm{BC}}=k$, $\overline{\mathrm{BO}_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO}_2\mathrm{B}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{C}}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{D}}+\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{C}}=\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}+\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{C}}$이므로
> $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

개념 파악하기 (3) 등차수열의 합은 어떻게 구할까?

등차수열의 합

등차수열에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구해 보자.
첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 제 n항이 l일 때, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+ \cdots +(l-2d)+(l-d)+l \quad \cdots ㉠$

㉠에서 우변의 항의 순서를 거꾸로 놓으면
$S_n = l+(l-d)+(l-2d)+ \cdots +(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 같은 변끼리 더하면
$2S_n = (a+l)+(a+l)+(a+l)+ \cdots +(a+l)+(a+l)+(a+l) = n(a+l)$

이므로 $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2} \quad \cdots ㉢$

$l = a_n = a+(n-1)d$를 ㉢에 대입하면 $S_n = \dfrac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2} = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다.

등차수열의 합 요약

등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

① 첫째항이 a, 제 n항이 l일 때, $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

Tip 1 둘 다 자주 나오므로 ①, ② 모두 암기가 되어있어야 한다.

Tip 2 여기서 n은 더하고자 하는 항의 **총 개수**임을 유의해야 하고 l은 마지막 항이라는 것에 유의해야 한다.

ex 수열 $\{a_n\}$이 등차수열일 때, $S = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_8$의 값을 구하시오.

항의 총 개수는 $8-2+1 = 7$개이므로 $n=7$이고 $l = a_8 = a+7d$ 이다.

$\therefore S = \dfrac{7(a_2+a_8)}{2} = \dfrac{7(a+d+a+7d)}{2} = \dfrac{7(2a+8d)}{2} = 7(a+4d)$

Tip 3 a, b, x가 정수이고 $a<b$일 때, $a \le x \le b$를 만족시키는 x의 개수는 $b-a+1$이다.

예제 4

다음 물음에 답하시오.

(1) 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하시오.

(2) 두 자리의 자연수 중에서 8의 배수의 합을 구하시오.

풀이

(1) $a=1,\ d=2$ 이므로 $S_{10}=\dfrac{10(2+(10-1)2)}{2}=100$ 이다.

(2) 두 자리 자연수 중에서 8의 배수를 작은 수부터 차례로 나열하면 16, 24, 32, $\cdots$, 88, 96 이다.
이는 첫째항이 16이고, 공차가 8인 등차수열이므로 96을 제 n항이라 하면 $96=16+(n-1)8 \Rightarrow n=11$
따라서 구하는 합은 $\dfrac{11(16+96)}{2}=616$이다.

개념 확인문제 7

다음 물음에 답하시오.

(1) 첫째항이 -4, 공차가 5인 등차수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하시오.

(2) 2와 20 사이에 k개의 수를 넣어 만든 수열 $2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k,\ 20$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 모든 수의 합이 110일 때, $k+a_1$의 값을 구하시오.

개념 파악하기 (5) 등비수열의 합은 어떻게 구할까?

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r(r \neq 0)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ······㉠

양변에 공비 r을 곱하면

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ ······㉡

㉠에서 ㉡을 같은 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a + ar + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ - & rS_n = & \quad\ \ ar + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline \end{array}$$

$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$이므로

① $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $r = 1$일 때, $S_n = na$

Tip 1 등비수열의 합은 $r \neq 1$일 때와 $r = 1$일 때로 case분류할 수 있다.

Tip 2 ① 는 $r \neq 1$이기만 하면 쓸 수 있다. 즉, r이 음수여도 쓸 수 있다.

Tip 3 보통 $r > 1$이면 $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$을 쓰고 $r < 1$이면 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$를 쓴다.

예를 들어 $r = 2$일 때, $\dfrac{a(2^n-1)}{2-1} = \dfrac{a(1-2^n)}{1-2}$ 의 경우 서로 같지만 좌변이 더 예쁘다.

Tip 4 여기서 n은 더하고자하는 항의 **총 개수**임을 유의해야 한다.

ex 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, $S = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_m$의 값을 구하시오.

항의 총 개수는 $m - 2 + 1 = m - 1$개일 때이므로 $n = m - 1$이고 첫째항은 $a = a_2$이다.

$\therefore S = \dfrac{a_2(r^{m-1}-1)}{r-1}$

Tip 5 등비수열의 합 $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a}{r-1} \times r^n - \dfrac{a}{r-1}$ 에서

크게 보면 꼴이 $S_n = A \times r^n + B$ $(r \neq 0, r \neq 1)$이라고 볼 수 있다.

① $A + B = 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 a_1부터 등비수열을 이룬다.

② $A + B \neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 a_2부터 등비수열을 이룬다.

등차수열과 마찬가지로 외워두면 편하지만 빈도수가 그렇게 높지 않으므로 등차수열 합의 꼴만 기억해도 좋다.

수열

040 | 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=a_3+8$, $2a_4-3a_6=3$ 일 때, $a_k<0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

041 | 2019학년도 고3 9월 평가원 나형

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=-15$, $|a_3|-a_4=0$ 일 때, a_7의 값은? [3점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

042 | 2020년 고3 10월 교육청 나형

함수 $f(x)=(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x+x^2+x^3)$일 때, $\dfrac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}}$의 값을 구하시오. [3점]

043 | 2021학년도 고3 6월 평가원 나형

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$, $\dfrac{S_6}{S_3}=2a_4-7$일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

044 | 2020학년도 고3 6월 평가원 나형

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$이 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

045 | 2009년 고3 4월 교육청 나형

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=40$, $a_8=30$일 때, $|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|$이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

046 | 2020년 고3 3월 교육청 가형

공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3\times a_5\times a_7=125$
(나) $\dfrac{a_4+a_8}{a_6}=\dfrac{13}{6}$

a_9의 값은? [3점]

① 10 ② $\dfrac{45}{4}$ ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ $\dfrac{55}{4}$ ⑤ 15

수열

합의 기호 $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 상수 c에 대하여 다음이 성립한다.

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ca_k&=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n\\&=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\\&=c\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

④ $\sum_{k=1}^{n}c=nc$

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=nc$$

Tip 1 ④에서 c는 k의 영향을 받지 않기 때문에 c가 n개 있으므로 $\sum_{k=1}^{n}c=nc$라 써야 한다.

$\sum_{k=1}^{n}a_n$ 의 경우 특히 조심해야 하는데 ④의 c와 마찬가지로 a_n은 k의 영향을 받지 않기 때문에 a_n이 n개 있으므로 $\sum_{k=1}^{n}a_n=na_n$라 써야 한다. 즉, 변수를 조심하자!

Tip 2 합의 기호 $\sum$의 기본 성질은 덧셈과 뺄셈에 대해서는 성립하지만
다음과 같이 곱셈과 나눗셈에 대해서는 성립하지 않으므로 유의하도록 하자.

① $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\neq\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$ ② $\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$ ③ $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\neq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$

왜 등식이 성립하지 않을까? 이는 직접 계산해보면 자명하다.

$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$

$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$

$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$

개념 파악하기 (2) 여러 가지 수열의 합은 어떻게 구할까?

자연수의 거듭제곱의 합

① $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합과 같으므로 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입한 후 각 변끼리 더하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{rll}
& \cancel{2^3}-1^3=3\times1^2+3\times1+1 & (k=1)\\
& \cancel{3^3}-\cancel{2^3}=3\times2^2+3\times2+1 & (k=2)\\
& 4^3-\cancel{3^3}=3\times3^2+3\times3+1 & (k=3)\\
& \vdots & \\
+ & (n+1)^3-\cancel{n^3}=3\times n^2+3\times n+1 & (k=n)\\
\hline
& (n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n &
\end{array}
$$

정리하면

$$
\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n}k^2&=(n+1)^3-1^3-3\sum_{k=1}^{n}k-n=(n+1)^3-3\times\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)=(n+1)\left\{(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right\}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

양변에 $\frac{1}{3}$을 곱하면 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이 성립한다.

Tip 공식이 헷갈리는 경우 $n=1$을 넣어서 $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=1$이 나오는지 체크해 본다.

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 ②과 같은 방법으로 구하면

$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

Tip 외울 때 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$라고 외우면 좋다.

④ $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}\{(2n+1)+3\}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Tip ④번은 외워도 되고 안 외워도 그만이다. 나름 잘 나오는 편이니 외워두면 편하다.

01 수열의 귀납적 정의

성취 기준 | 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

개념 파악하기 (1) 수열의 귀납적 정의란 무엇일까?

수열의 귀납적 정의

수열을 정의할 때, 수열의 일반항을 구체적인 식으로 나타내기도 하지만
이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 나타내기도 한다.

예를 들어 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$을 $a_n=3n-1$ 와 같이 구체적인 식으로 나타내기도 하지만 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=a_n+3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \quad \cdots \text{㉠}$$

역으로 ㉠이 주어지면 a_1이 결정되고, n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3=5$
$a_3=a_2+3=8$
$a_4=a_3+3=11$
$\vdots$

과 같이 모든 항이 결정된다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 정해지므로 ㉠에 의하여 수열 $\{a_n\}$이 정의된다.

이처럼

① 처음 몇 개의 항의 값
② 이웃하는 여러 항 사이의 관계식

으로 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라 한다.

개념 확인문제 1

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 4항을 구하시오.

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+n^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1=12 \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

047 | 2021학년도 고3 6월 평가원 가형

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \qquad \cdots\cdots \ (\ *\ )$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{(가)}+m\times 2^{-m-1}$$
$$=\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

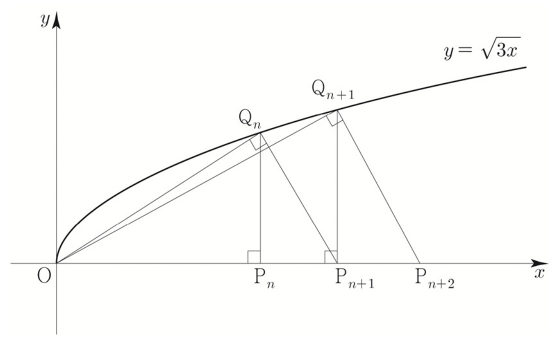
① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

048 | 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 P_nQ_n이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 Q_nP_{n+1}이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OP_n}+\overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{P_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times(\boxed{(나)})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

066 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
> (단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
>
> (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

067 | 2023학년도 수능 공통

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

> (가) $a_7=40$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

수열

지수함수와 로그함수 | Guide step

1	(1) $y=-2(x+2)^2+3$ (2) $y=2x+10$ (3) $(x+2)^2+(y-4)^2=2$
2	3
3	풀이 참고
4	풀이 참고
5	(2), (3)
6	풀이 참고
7	풀이 참고
8	(1) 최댓값은 7, 최솟값은 3 (2) 최댓값은 4, 최솟값은 1
9	풀이 참고
10	풀이 참고
11	(1) 최댓값은 4, 최솟값은 1 (2) 최댓값은 -1, 최솟값은 -2

해설

개념 확인문제 1

x 에 $x+2$를 대입하고 y에 $y-3$을 대입한다.
y축의 방향으로 a만큼 평행이동 : $y \to y-a$
$y-a=f(x)$ 보다는 $y=f(x)+a$와 같은 형태를 더 많이 쓴다.

(1) $y=-2x^2 \Rightarrow y=-2(x+2)^2+3$

(2) $y=2x+3 \Rightarrow y=2(x+2)+6 \Rightarrow y=2x+10$

(3) $x^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=2$

답 (1) $y=-2(x+2)^2+3$ (2) $y=2x+10$
(3) $(x+2)^2+(y-4)^2=2$

개념 확인문제 2

$2x-y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동시키려면
$x \to -x$, $y \to -y$

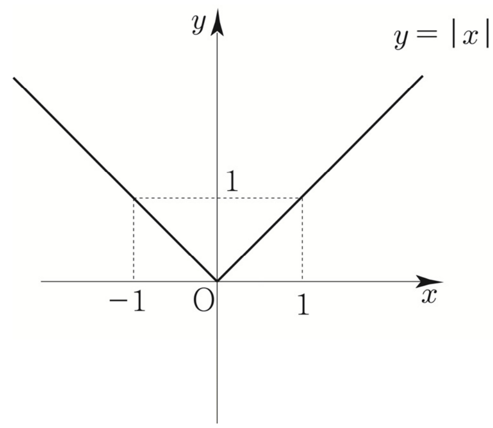
$2x-y+1=0 \Rightarrow -2x+y+1=0$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키려면 $x \to x-2$
$-2x+y+1=0 \Rightarrow -2(x-2)+y+1=0$

직선 $y=2(x-2)-1=2x-5$이
원 $(x-4)^2+(y-a)^2=1$의 넓이를 이등분하려면
직선이 원의 중심을 지나면 된다.
원의 중심은 $(4,\ a)$이므로 직선의 식에 대입하면
$a=8-5=3$이다.

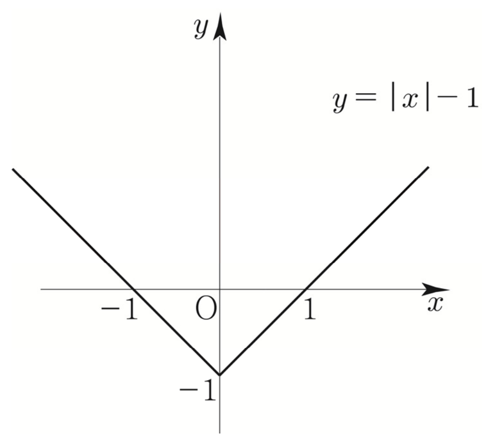
답 3

개념 확인문제 3

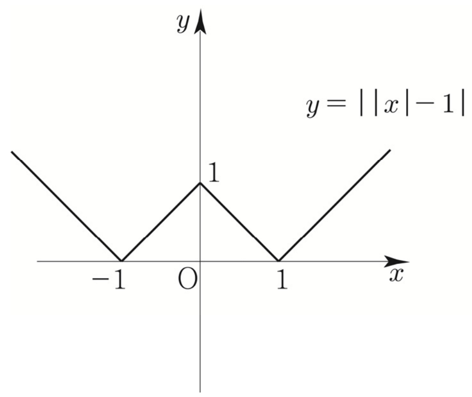
(1) $y=|x|-1$
① $y=x$를 기본함수로 두자.
② $y=|f(x)|$을 적용하면 $y=|x|$이다.



③ $y=|x|$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=|x|-1$이다.



(2) $y=||x|-1|$
① $y=|x|-1$를 기본함수로 두자.
② $y=|f(x)|$을 적용하면 $y=||x|-1|$이다.



다르게 접근해도 된다.

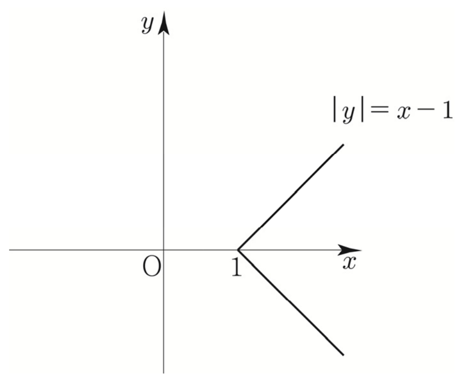
① $y=|x-1|$을 기본함수로 두자.

② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면 $y=||x|-1|$이다.

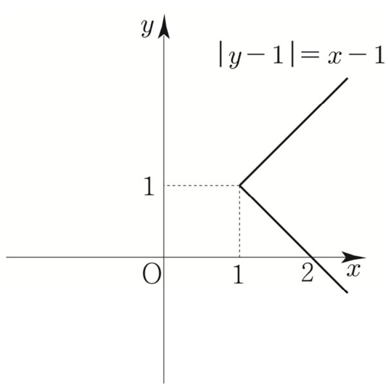
(3) $|y-1|=x-1$

① $y=x-1$를 기본함수로 두자.

② $y \rightarrow |y|$ (y가 양수인 부분을 x축 대칭) 하면 $|y|=x-1$이다.

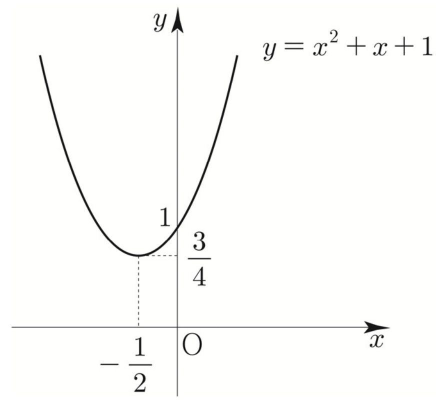


③ $|y|=x-1$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $|y-1|=x-1$이다.

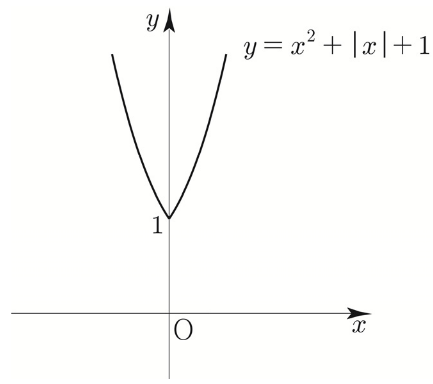


(4) $y=x^2+|x|+1$

① $y=x^2+x+1$을 기본함수로 두자.



② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면 $y=|x|^2+|x|+1$ 이 $|x|^2=x^2$이므로 $y=x^2+|x|+1$이다.

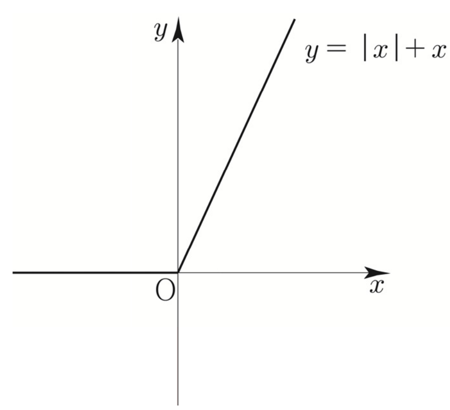


개념 확인문제 4

(1) $y=|x|+x$

$x \geq 0 \Rightarrow y=x+x=2x$
$x < 0 \Rightarrow y=-x+x=0$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



(2) $y=|x|+|x-1|$

절댓값이 걸려있는 식은 x, $x-1$ 이므로

$x \le 0$인지 $0<x \le 1$인지 $1<x$에 따라

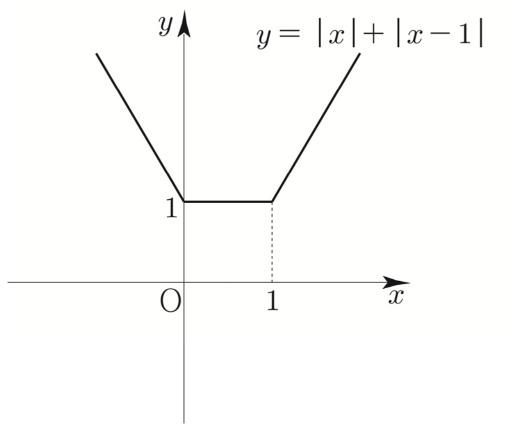
case분류할 수 있다.

$x>1 \Rightarrow y=x+x-1=2x-1$

$0<x \le 1 \Rightarrow y=x-(x-1)=1$

$x \le 0 \Rightarrow -x-(x-1)=-2x+1$

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x>1) \\ 1 & (0<x \le 1) \\ -2x+1 & (x \le 0) \end{cases}$$



개념 확인문제 5

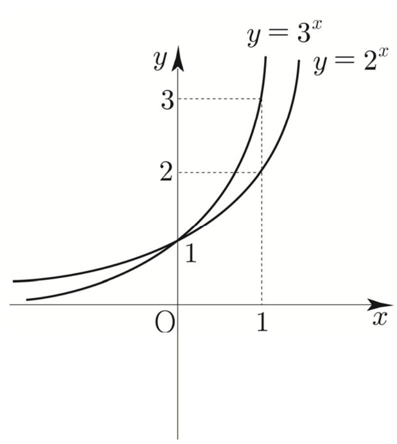
(2), (3)만 지수함수이다.

(1)은 다항함수, (4)는 유리함수이다.

답 (2), (3)

개념 확인문제 6

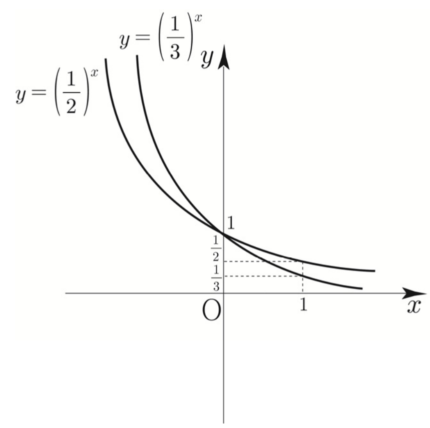
(1) $y=2^x$, $y=3^x$



Tip1 $(0,\ 1)$에서 교차됨에 유의하자.

Tip2 한 좌표축 안에 지수함수를 여럿이 그릴 때는 $x=1$을 대입하여 나오는 함숫값을 토대로 누가 위에 있고 아래에 있는지 판단할 수 있다.

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



Tip $(0,\ 1)$에서 교차됨에 유의하자.

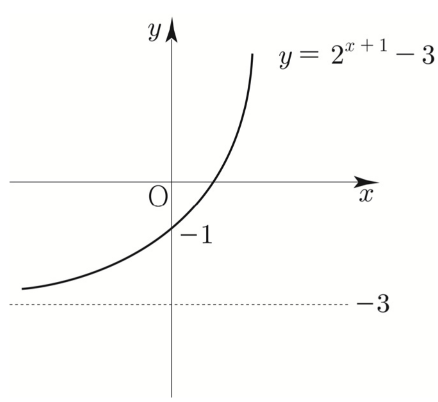
개념 확인문제 7

(1) $y=2^{x+1}-3$

① $y=2^x$를 기본함수로 두자.

② x축의 방향으로 -1만큼 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=2^{x+1}-3$이다.

Tip 지수함수의 경우 x축 방향의 평행이동은 전체적인 그래프 개형에 영향을 주지 않으므로 y축 방향의 평행이동을 고려하면 된다.



점근선 : $y=-3$

(2) $y=-3^{-x+1}$

① $y=3^{-x}$를 기본함수로 두자.

② x축 방향으로 1만큼 평행이동하면

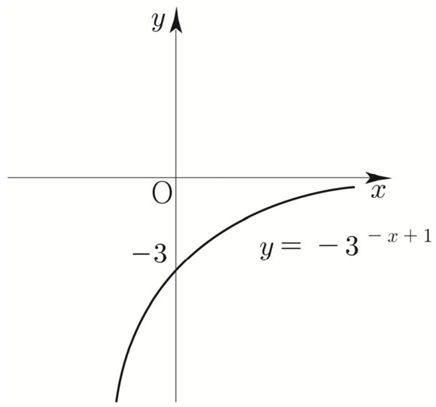
$y=3^{-(x-1)}=3^{-x+1}$ 이다.

③ x축에 대하여 대칭이동하면

$y \rightarrow -y$

$y=f(x) \Rightarrow -y=f(x) \Rightarrow y=-f(x)$

$y=-3^{-x+1}$이다.

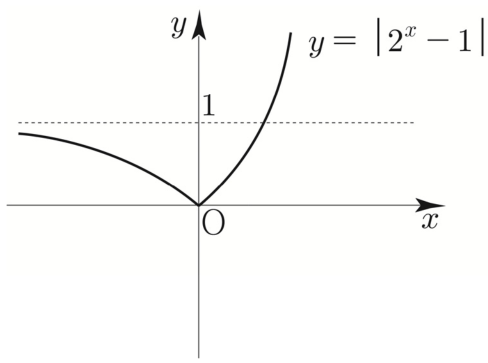


점근선 : $y=0$

(3) $y=|2^x-1|$

① $y=2^x-1$를 기본함수로 두자.

② $y=|f(x)|$을 적용하면 $y=|2^x-1|$



점근선 : $y=1$

($x>0$ 부분에서 $y=1$과 교점이 생겨도 상관없다.

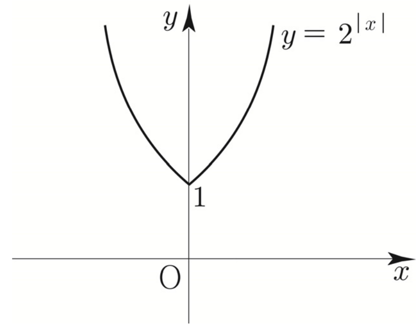
x의 값이 한없이 작아질 때, $y=|2^x-1|$는 $y=1$로 근접하므로 $y=1$은 점근선이다.)

(4) $y=2^{|x|}$

① $y=2^x$를 기본함수로 두자.

② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면

$y=2^{|x|}$이다.



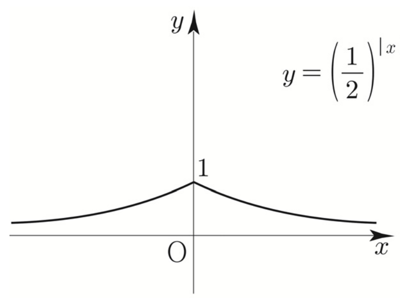
점근선은 존재하지 않는다.

(5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+1$

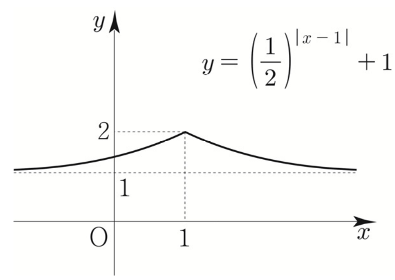
① $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$을 기본함수로 두자.

② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$이다.



③ x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동 하면 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+1$이다.



점근선 : $y=1$

Tip $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$의 그래프를 그릴 때,

많은 학생들이 실수하는 포인트는 다음과 같다.

<실수하는 학생의 사고 과정>

① $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$을 기본함수로 두자.

② x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$이다.

③ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$???

지수에 있는 $x-1$에만 절댓값을 거는 행위는

배운 적이 없다. 만약 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$에서

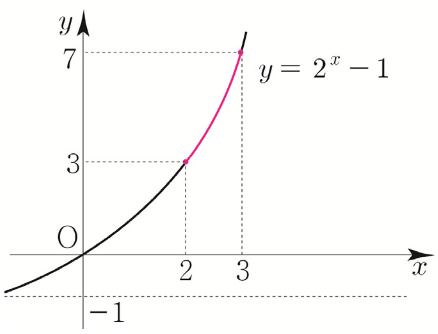
$x \to |x|$를 하면 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1}$이 되지

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$이 되지는 않는다.

따라서 우리가 배운 테두리 안에서 식을 설계해야 한다.

개념 확인문제 8

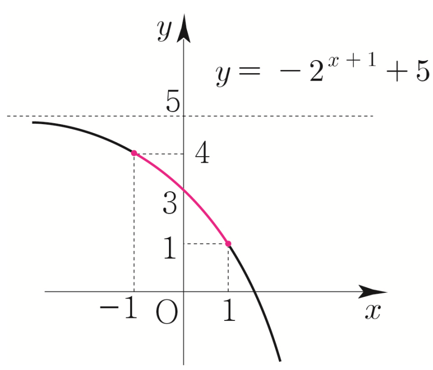
(1) 정의역이 $\{x|\ 2 \le x \le 3\}$인 함수 $y=2^x-1$



$x=2$일 때, 최솟값은 $2^2-1=3$이다.

$x=3$일 때, 최댓값은 $2^3-1=7$이다.

(2) 정의역이 $\{x|\ -1 \le x \le 1\}$인 함수 $y=-2^{x+1}+5$



$x=1$일 때, 최솟값은 $-2^2+5=1$이다.

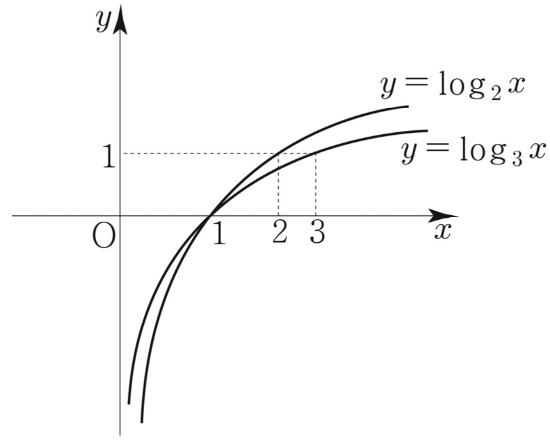
$x=-1$일 때, 최댓값은 $-2^0+5=4$이다.

답 (1) 최댓값은 7, 최솟값은 3

(2) 최댓값은 4, 최솟값은 1

개념 확인문제 9

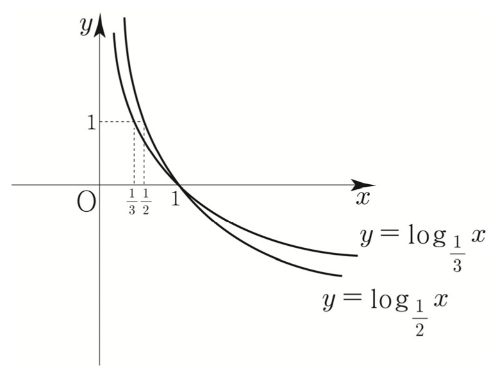
(1) $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$



Tip1 $(1,\ 0)$에서 교차됨에 유의하자.

Tip2 한 좌표축 안에 로그함수를 여럿이 그릴 때는 $y=1$의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 토대로 누가 위에 있고 아래에 있는지 판단할 수 있다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$



Tip $(1,\ 0)$에서 교차됨에 유의하자.

개념 확인문제 10

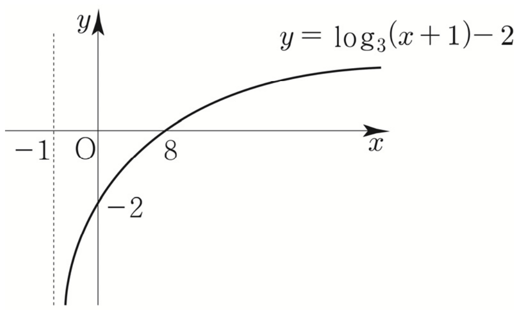
(1) $y=\log_3(x+1)-2$

① $y=\log_3 x$를 기본함수로 두자.

② x축의 방향으로 -1만큼 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=\log_3(x+1)-2$이다.

Tip1 로그함수를 그릴 때, 점근선부터 찾는 것이 좋다. 진수가 0이 되도록 하는 x값을 a라 했을 때, $x=a$가 점근선의 방정식이 된다.

Tip2 로그함수의 경우 y축 방향의 평행이동은 전체적인 그래프 개형에 영향을 주지 않으므로 x축 방향의 평행이동을 고려하면 된다.



점근선 : $x=-1$

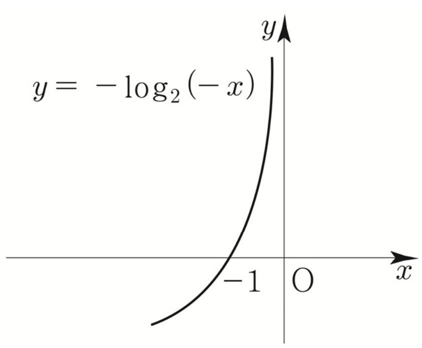
(2) $y=-\log_2(-x)$

① $y=\log_2 x$를 기본함수로 두자.

② $x \to -x$ (y축에 대하여 대칭)하면
$y=\log_2(-x)$이다.

③ $y \to -y$ (x축에 대하여 대칭)하면
$y=-\log_2(-x)$ 이다.

Tip 그래프가 익숙해지면 기본함수가 $y=-\log_2(-x)$가 되는 날이 온다. 익숙해질 때까지 많이 그려보자.



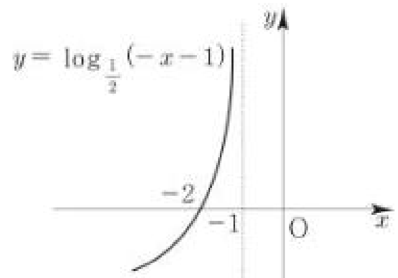
점근선 : $x=0$

(3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$

① $y=\log_{\frac{1}{2}} x$를 기본함수로 두자.

② $x \to -x$ (y축에 대하여 대칭)하면
$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$이다.

③ x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$y=\log_{\frac{1}{2}}(-(x+1))=\log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$ 이다.

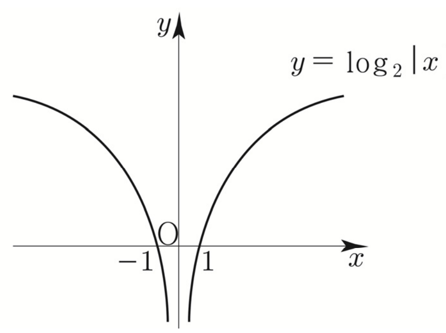


점근선 : $x=-1$

(4) $y=\log_2|x|$

① $y=\log_2 x$을 기본함수로 두자.

② $x \to |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면
$y=\log_2|x|$이다.



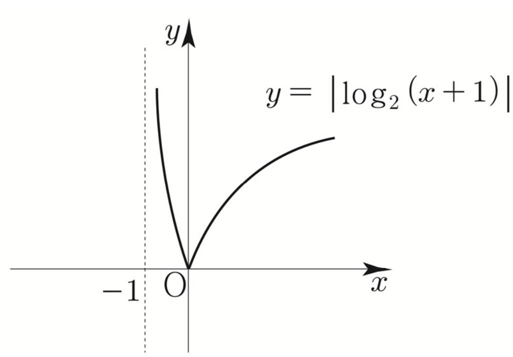
점근선 : $x=0$

Tip 만약 $y=\log_2 x^2$의 그래프를 그리라고 했을 때, $y=2\log_2 x$가 아니라 $y=2\log_2|x|$임을 기억하자. 따라서 위와 같은 그래프형태가 그려진다.

(5) $y=|\log_2(x+1)|$

① $y=\log_2(x+1)$를 기본함수로 두자.

② $y=|f(x)|$를 적용하면 $y=|\log_2(x+1)|$이다.



점근선 : $x=-1$

따라서 $a+b=9$이다.

답 9

002

$f(x)=3^{ax+b}$에서 $f(1)=9,\ f(3)=27$이므로

$f(1)=3^{a+b}=3^2 \Rightarrow a+b=2$

$f(3)=3^{3a+b}=3^3 \Rightarrow 3a+b=3$

$a+b=2,\ 3a+b=3$을 연립하면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$이다.

$f(x)=3^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

따라서 $f(a+3b)=f(5)=3^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}=3^4=81$이다.

답 81

003

$\mathrm{A}(-2,\ 9),\ \mathrm{B}(b,\ k),\ \mathrm{C}(0,\ c)$라 하자.

$2\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CB}}$라는 말은

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이 C라는 뜻이다.

$\frac{2\times\mathrm{A}+1\times\mathrm{B}}{2+1}=\frac{2\mathrm{A}+\mathrm{B}}{3}=\mathrm{C}$이므로

x좌표를 계산하면

$\frac{2\mathrm{A}+\mathrm{B}}{3}=\frac{2(-2)+b}{3}=0 \Rightarrow -4+b=0 \Rightarrow b=4$

점 B가 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위의 점이므로

$k=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$이다.

답 $\frac{1}{81}$

Tip 내분점을 구하는 것이 낯설었다면
아래강의를 참고하도록 하자.

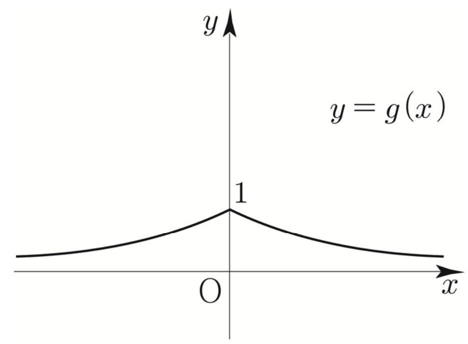
내분점과 외분점 강의 (19분)

https://youtu.be/kAYtpoXFh24

004

$g(x)=2^{-f(x)}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} 2^{-x} & (x\ge 0) \\ 2^{x} & (x<0) \end{cases}$$



ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 모든 실수 x에 대하여
$g(-x)=g(x)$이므로 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(0)$는
함수 $y=g(x)$가 $x=0$에서 최댓값을 갖는지 물어보는
것과 같다. 최댓값 $g(0)=1$을 가지므로
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. x축을 점근선으로 가지므로 ㄷ은 참이다.

ㄹ. 치역은 $\{y\mid 0<y\le 1\}$이므로 ㄹ은 참이다.

ㅁ. $0<x<1$일 때, x값이 증가하면 y의 값은 감소하므로
ㅁ은 거짓이다.

ㅂ. $g(x_1)=g(x_2)$이면 $x_1=x_2$ 또는 이것의 대우인
$x_1\ne x_2$ 이면 $g(x_1)\ne g(x_2)$ 는
함수 $g(x)$가 일대일 함수인지 물어보는 것과 같다.
$y=k$(가로선)을 그었을 때, $g(x)$와 2개 이상 만나는
점이 존재함으로 $g(x)$는 일대일함수가 아니다.
따라서 ㅂ은 거짓이다.

ㅅ. $\frac{1}{k+1}=a$라 하면 $k>0$이면 $0<a<1$이므로
방정식 $g(x)=a$은 항상 서로 다른 2개의 실근을
갖는다. 따라서 ㅅ은 참이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(9-1)\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times8\times4=16$이다.

답 16

041

n은 3이상의 자연수

$A(2,\ 1),\ B(n,\ 1),\ C(4,\ 2),\ D(n^2,\ 2)$

$\overline{AB}=n-2,\ \overline{CD}=n^2-4$이므로

사다리꼴 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2-1)\times(\overline{AB}+\overline{CD})=\frac{n^2+n-6}{2}$이다.

$\frac{n^2+n-6}{2}\le 33 \Rightarrow n^2+n-72\le 0 \Rightarrow (n+9)(n-8)\le 0$

$\Rightarrow -9\le n\le 8 \Rightarrow 3\le n\le 8\ (\because\ n\ge 3)$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+6+7+8=33$이다.

답 33

042

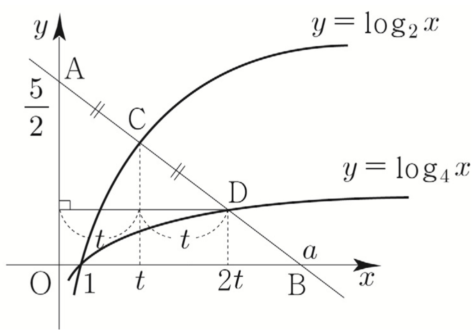
좌표평면 위의 두 점 $A\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$과 $B(a,\ 0)\ (a>1$인 상수)

를 지나는 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x,\ y=\log_4 x$와

만나는 점을 각각 C, D라 하자.

$\overline{AC}=\overline{CD}$이므로 점 C의 x좌표를 t라 두면

점 D의 x좌표는 $2t$이다.



두 점 $A\left(0,\ \frac{5}{2}\right),\ D(2t,\ \log_4 2t)$의 중점이 $C(t,\ \log_2 t)$

이므로 $\frac{\frac{5}{2}+\log_4 2t}{2}=\log_2 t \Rightarrow \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\log_2 2t=2\log_2 t$

$\Rightarrow 5+1+\log_2 t=4\log_2 t \Rightarrow 6=3\log_2 t \Rightarrow t=4$

$t=4$이므로 $C(4,\ 2)$ 이다.

직선 AC의 방정식을 구하면

기울기 $=\frac{2-\frac{5}{2}}{4-0}=\frac{4-5}{8}=-\frac{1}{8}$이고 y절편이 $\frac{5}{2}$이므로

$y=-\frac{1}{8}x+\frac{5}{2}$ 이다. $B(a,\ 0)$을 대입하면

$0=-\frac{1}{8}a+\frac{5}{2} \Rightarrow a=20$

답 20

Tip 042번은 보통 학생들이 어려워하는 문제 중 하나이다. 쉬운 문제와 어려운 문제를 가르는 요소 중 하나가 바로 미지수 놓기인데 이 문제에서는 점 C, D의 x좌표를 모두 모르기 때문에 미지수 놓기를 주저할 수 있다. $\overline{AC}=\overline{CD}$의 조건을 바탕으로 하나의 미지수로 통일하는 문제였다. 미지수를 놓는 것을 두려워하지 말자!

043

$y=\log_3(27x-27)=\log_3 27(x-1)=\log_3(x-1)+3$는

$y=\log_3 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의

방향으로 3만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

점 A는 과연 어디로 평행이동할까?

점 $A(a,\ b)$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로

3만큼 평행이동시킨 점은 $A'(a+1,\ b+3)$이다.

$y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 모든 점들을 x축의 방향으로

1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 점들의 자취가

$y=\log_3(27x-27)$의 그래프이므로 점 $A'(a+1,\ b+3)$은

$y=\log_3(27x-27)$ 위의 점인 것이 자명하다.

또한 직선 AA′는 기울기가 3이고 점 A를 지나므로

$y=3x-6$과 같다.

점 A′는 $y=\log_3(27x-27)$ 위에도 있어야 하고

직선 $y=3x-6$ 위에도 있어야 한다.

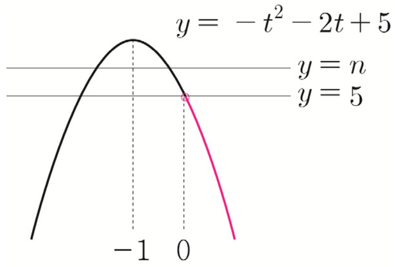
즉, 곡선 $y=\log_3(27x-27)$와 직선 $y=3x-6$의 교점인

점 B가 점 $A'(a+1,\ b+3)$인 것을 알 수 있다.

두 점 C, D도 마찬가지 관계이다.

따라서 아래 그림에서 색칠한 두 영역은 합동이므로

넓이가 같다.



$n \geq 5$이면 모든 양수 t에 대하여
$-t^2-2t+5 < n$를 만족시킨다.

따라서 20 이하의 모든 자연수 n의 개수는
$20-5+1=16$이다.

답 16

Tip 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.

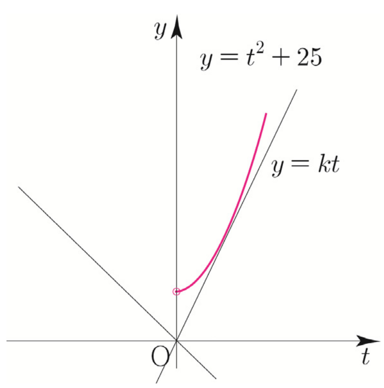
t1 010번 해설강의

https://youtu.be/qZ9q1PRWoEI

011

모든 실수 x에 대하여 부등식 $25^x - k \times 5^x + 25 \geq 0$
$5^x = t \ (t>0)$라 치환하면
$t^2 - kt + 25 \geq 0 \Rightarrow t^2 + 25 \geq kt \ (t>0)$

$=y$를 붙여서 함수로 생각해보자.
$y = t^2+25, \ y = kt \ (t>0)$



$y=kt$는 k와 관계없이 지나는 점이 $(0, \ 0)$이므로
여기서 k는 정점 $(0, \ 0)$을 지나고 빙글빙글 돌아가는 직선의 기울기로 해석할 수 있다. (정점 테크닉)
$t>0$에서 항상 $t^2+25 \geq kt$를 만족시키려면 k의 값이
$y=kt$가 $y=t^2+25$와 접할 때의 k보다 작거나 같으면 된다.

여기서 주의해야할 점은 $t>0$에서 주어진 부등식이
성립하면 되기 때문에 $k \leq 0$이어도 된다는 사실이다.
(여기서 k는 직선 $y=kt$의 기울기를 의미한다.)

접할 때 k를 구하면
$t^2+25 = kt \Rightarrow t^2 - kt + 25 = 0 \Rightarrow D = k^2 - 100 = 0$
$\Rightarrow k = 10$
(우리가 구하고 싶은 접할 때 k는 양수이므로 -10이
아니라 10이어야 한다.)

따라서 실수 k의 범위는 $k \leq 10$이다.

답 $k \leq 10$

Tip1 이 문제에서 나오는 정점 테크닉은 모의고사에
자주 출제되는 테크닉 중 하나이니 반드시 기억하자.
만약 $y = k(x-2)+1$이라면 k와 관계없이 항상
지나는 정점은 $(2, \ 1)$이 된다.

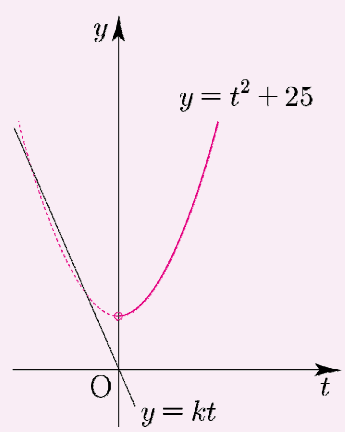
Tip2 질문이 매우 자주 나오는 문제인데
정의역이 양수라는 사실을 절대 놓치면 안 된다.
즉, $t>0$에서만 부등식 $t^2+25 \geq kt$을
만족시키면 된다.

Tip3 <범위가 있을 때, 판별식 유의사항>

아마 판별식 $D \leq 0$이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
범위가 $t>0$이므로 판별식을 쓸 수 없다.

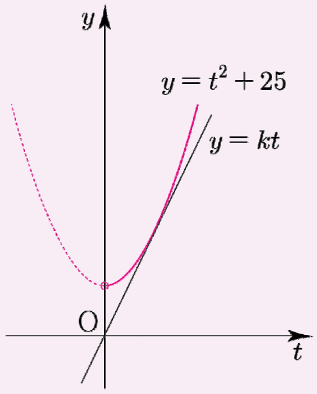
도대체 왜 그럴까?

판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고
가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.



위와 같이 $k < -10$일 때, 판별식을 쓰면 서로 다른
두 실근을 갖는다고 알려주지만 실제로는
정의역이 $t>0$이므로 실근을 갖지 않는다.

$t>0$에서 $y=kt$와 $y=t^2+25$가 접할 때의 k의 값을 구하기 위해서 판별식을 쓸 수 없을까?



정답은 "쓸 수 있다" 이다. $t>0$이지만 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

<요약>

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야 하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.
2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.

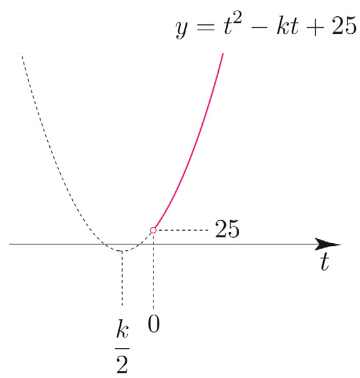
이번에는 다른 방식으로 풀어보자.

$t^2-kt+25 \geq 0$ $(t>0)$이므로 곡선 $y=t^2-kt+25$와 t축$(y=0)$의 위치관계를 이용하여 풀어보자.

이차함수의 대칭축이 $t=\frac{k}{2}$이므로

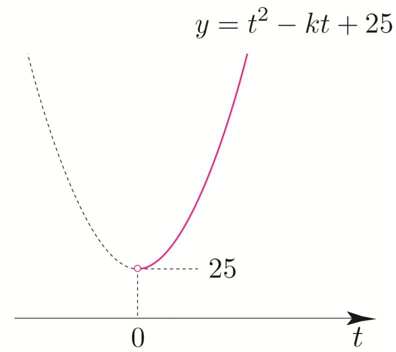
k의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $\frac{k}{2}<0 \Rightarrow k<0$일 때



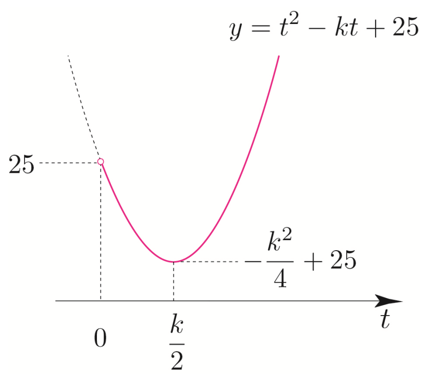
$t>0$에서 곡선 $y=t^2-kt+25$가 t축보다 위에 있으므로 조건을 만족시킨다.

② $\frac{k}{2}=0 \Rightarrow k=0$일 때



$t>0$에서 곡선 $y=t^2-kt+25$가 t축보다 위에 있으므로 조건을 만족시킨다.

③ $\frac{k}{2}>0 \Rightarrow k>0$일 때



꼭짓점의 y좌표가 $-\frac{k^2}{4}+25$이므로

$-\frac{k^2}{4}+25 \geq 0 \Rightarrow k^2-100 \leq 0 \Rightarrow (k-10)(k+10) \leq 0$

$\Rightarrow -10 \leq k \leq 10 \Rightarrow 0<k \leq 10$ $(\because k>0)$

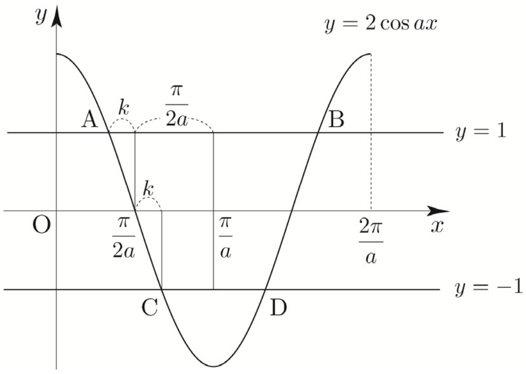
①, ② ,③ 에 의해서 $k \leq 10$이다.

012

$0 \leq x \leq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$9^x-6\times 3^x \geq 9^k-10\times 3^k$

$3^x=t$ $(t>0)$라 치환하면
$0 \leq x \leq 1$에서 t의 범위는 $1 \leq t \leq 3$이다.

$1 \leq t \leq 3$에서 $t^2-6t \geq 9^k-10\times 3^k$가 항상 성립하려면
t^2-6t $(1 \leq t \leq 3)$의 최솟값보다 $9^k-10\times 3^k$가
작거나 같으면 된다.



$\overline{\text{AB}}=2\left(k+\dfrac{\pi}{2a}\right)=2k+\dfrac{\pi}{a}$, $\overline{\text{CD}}=2\left(\dfrac{\pi}{2a}-k\right)=\dfrac{\pi}{a}-2k$

이고, 사각형 ABDC의 넓이가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times2\times(\overline{\text{AB}}+\overline{\text{CD}})\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{a}$

따라서 $a=6$이다.

답 6

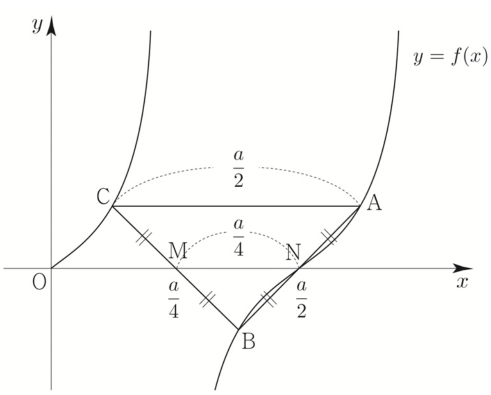
014

$f(x)=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{2\pi}{a}x$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\frac{2\pi}{a}}=\dfrac{a}{2}$이다.

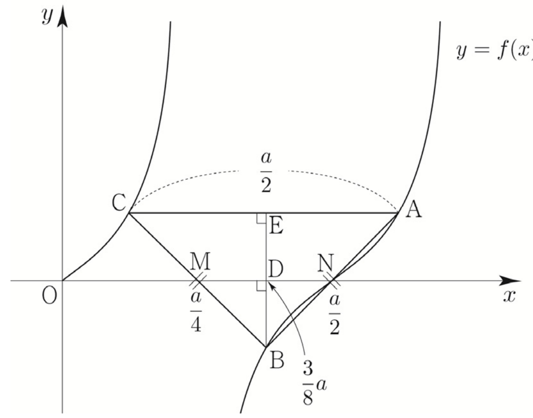
대칭성에 의하여 두 선분 BC, BA의 중점은 각각 M, N이다.
($\because$ 점 A, B는 점 N에 대해 점대칭,
점 B, C는 점 M에 대해 점대칭)

즉, $\overline{\text{MN}}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{AC}}=\dfrac{a}{4}$

점 N의 x좌표가 $\dfrac{a}{2}$이므로 점 M의 x좌표는 $\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{4}=\dfrac{a}{4}$



$\overline{\text{BA}}=\overline{\text{BC}}$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 여기서 점 B에서 x축과 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 직선 BE는 선분 AC를 수직이등분한다.

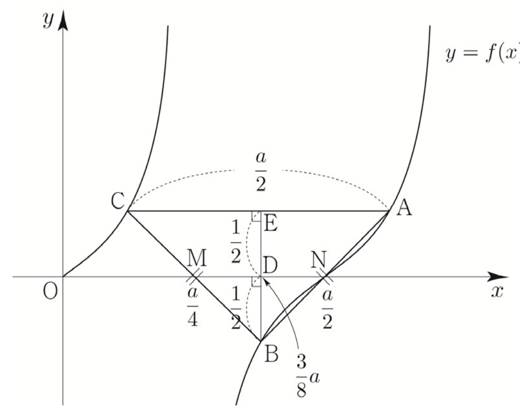


즉, 선분 MN의 중점은 D이므로

D의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{4}+\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{3}{8}a$이다.

$f\left(\dfrac{3}{8}a\right)=\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{2\pi}{a}\times\dfrac{3}{8}a\right)=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{3}{4}\pi=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\overline{\text{BE}}=1$이다.



삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BE}}\times\overline{\text{AC}}=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{4}=1\Rightarrow a=4$

따라서 $a=4$이다.

답 4

015

$y=a\sin(bx-c)$

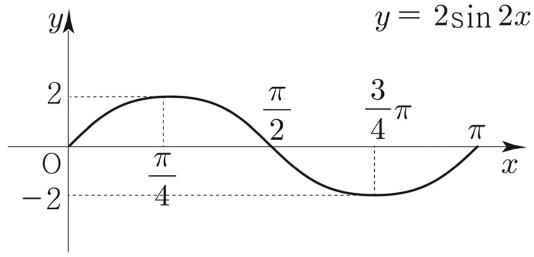
최댓값이 2이고 최솟값이 -2이므로

$|a|=2\Rightarrow a=2\ (a>0)$

주기가 $\dfrac{5}{6}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$이므로

$\dfrac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow b=2\ (b>0)$

$y=2\sin(2x-c)$는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 구할 수 있다.



$y=2\sin 2x$ 의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$를 기준으로

$y=2\sin(2x-c)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$을 살펴보면

$(0,\ 0) \rightarrow \left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$이므로 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼

평행이동했다고 볼 수 있다.

(여기서 주의해야할 점은 $y=2\sin 2x$ 를 평행이동시키는 것이지 $y=\sin x$를 평행이동시키는 것이 아니라는 점이다.)

하지만 $y=2\sin 2x$ 는 주기가 π인 주기함수이므로 x축의 방향으로 $n\pi$(n은 정수)만큼 더 평행이동하여도 조건을 만족시킨다.

즉, $y=2\sin(2x-c)$는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $n\pi+\frac{\pi}{3}$(n은 정수)만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

$x \rightarrow x-\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$y=2\sin 2\left(x-n\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x-2n\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$

이므로 $c=2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (n은 정수) 이다.

$2\pi<c<3\pi$ 이므로 $c=2\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$이다.

따라서 $\frac{3abc}{\pi}=\frac{3}{\pi}\times 2\times 2\times\frac{8}{3}\pi=32$이다.

답 32

Tip1 위의 풀이를 완벽히 이해했다면 어떠한 미정계수 문제가 나와도 다 풀 수 있다. 누구에게 설명할 수 있을 때까지 체화해보자!

Tip2 만약 위 풀이가 잘 이해되지 않는다면 아래 해설강의를 참고하도록 하자.

삼각함수의 미정계수 (7분)
t1 015번 해설강의
https://youtu.be/v_AcRJnEsCQ

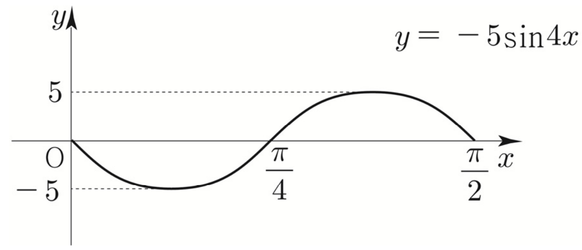
016

이 문제는 $a<0$라는 것에 조심해야 한다.

최댓값이 5이고 최솟값이 -5이므로 $a=-5$이다.

주기가 $\frac{3}{8}\pi-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow b=4$

$y=-5\sin(4x-c)$는 $y=-5\sin 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 구할 수 있다.



$y=-5\sin 4x$ 의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$를 기준으로

$y=-5\sin(4x-c)$ 위의 점 $\left(-\frac{\pi}{8},\ 0\right)$을 살펴보면

$(0,\ 0) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{8},\ 0\right)$이므로 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{8}$만큼

평행이동했다고 볼 수 있다.

015번과 마찬가지 논리로 주기 $\frac{\pi}{2}$까지 고려해서 평행이동 시켜보자.

즉, $y=-5\sin(4x-c)$는 $y=-5\sin 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{8}$($n$은 정수)만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

$x \rightarrow x-\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{8}\right)$

$y=-5\sin 4\left(x-\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{8}\right)=-5\sin\left(4x-2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

이므로 $c=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (n은 정수) 이다.

$3\pi<c<4\pi$ 이므로 $c=4\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$이다.

따라서 $\frac{-abc}{10\pi}=-\frac{1}{10\pi}\times(-5)\times 4\times\frac{7}{2}\pi=7$이다.

답 7

$\frac{1}{2}(1+3+5+\cdots+31)=\frac{1}{2}\times\frac{16(1+31)}{2}=128$

n이 짝수일 때를 묶어서 계산해보자.

$2+6+10+\cdots+30=\frac{8(2+30)}{2}=128$

따라서 $\sum_{n=1}^{32} n(a_n)^2=256$이다.

답 256

094

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수

k의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $k>0$

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+k^2-6$이므로
이 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하려면
최댓값 $k+k^2-6\le 0$이어야 한다.
$(k-2)(k+3)\le 0 \Rightarrow -3\le k\le 2$
전제조건 $k>0$까지 고려하면 $0<k\le 2$이다.

② $k=0$

$y=-6$이므로 제 1사분면을 지나지 않으므로
조건을 만족시킨다.

Tip 빼먹기 쉬운 case이므로 각별히 유의해야한다.
$y=ax^2+x+2$는 2차함수인가? 답은 "모른다"이다.
$a\ne 0$이어야 2차함수이지 $a=0$이면 1차함수가 되기 때문이다. 만약 방정식 $ax^2+x+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하기 위해 판별식을 쓸 때에도 $a\ne 0$라는 전제조건을 붙인 후 써야한다.
이는 2010학년도 수능 가형 8번 문제에서 확인할 수 있으니 찾아서 풀어보길 추천한다. 썰을 풀자면 재수생시절 2010학년도 수능 가형을 현장에서 풀 당시 a가 0인지 0이 아닌지 고려했던 기억이 아직까지 생생하다.

③ $k<0$

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $-k+k^2-6$이므로
이 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하려면
최댓값 $-k+k^2-6\le 0$이어야 한다.
$(k+2)(k-3)\le 0 \Rightarrow -2\le k\le 3$
전제조건 $k<0$까지 고려하면 $-2\le k<0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$
이므로 모든 정수 k의 개수는 5이다.

답 5

다르게 풀어보자.
$k\,(k\ne 0)$의 부호를 모두 고려하여 주어진 함수의 최댓값을 구하면 $|k|+k^2-6$이다. 이 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로
$k^2+|k|-6\le 0 \Rightarrow |k|^2+|k|-6\le 0$
$\Rightarrow (|k|+3)(|k|-2)\le 0 \Rightarrow |k|\le 2\ (k\ne 0)$
$k=0$일 때도 성립하므로 $-2\le k\le 2$이다.

095

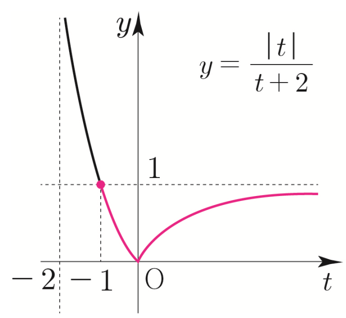
$y=\frac{|\tan x|}{\tan x+2}\ \left(\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi\right)$

$\tan x=t$라 치환하자.
$\frac{3}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi$에서 t의 범위를 구하면 $-1\le t$

$y=\frac{|t|}{t+2}\ (-1\le t)$

t의 범위에 따라 case분류 하면
$t>0 \Rightarrow y=\frac{t}{t+2}=1+\frac{-2}{t+2}$

$t<0 \Rightarrow y=\frac{-t}{t+2}=-1+\frac{2}{t+2}$



$t=-1 \Rightarrow x=\frac{3}{4}\pi=a$일 때, 최댓값 $1=M$

$t=0 \Rightarrow x=\pi=b$일 때, 최솟값 $0=m$

따라서 $\frac{16a}{b}+M+m=13$ 이다.

답 13

096

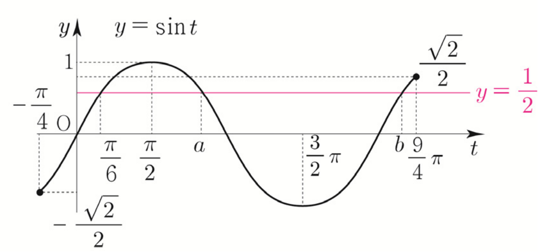
$y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$ $(0 \le x \le 10\pi)$와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표를 찾아보자.

$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2 \Rightarrow \sin\frac{1}{4}(x-\pi)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}(x-\pi)=t$로 치환하자.

$0 \le x \le 10\pi$에서 t의 범위를 구하면 $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{9}{4}\pi$

$\sin t=\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{9}{4}\pi\right)$



대칭성을 이용하면 ($x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭)

$\frac{\pi}{6}+a=\pi \Rightarrow a=\frac{5}{6}\pi$

주기성을 이용하면 (주기 2π)

$\frac{\pi}{6}+2\pi=b \Rightarrow b=\frac{13}{6}\pi$

다시 x의 값으로 변화해주면

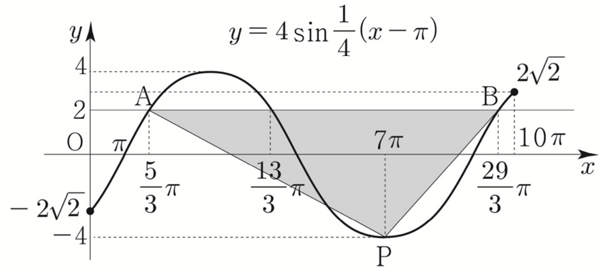
곡선 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$ $(0 \le x \le 10\pi)$

와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표는 다음과 같다.

$\frac{1}{4}(x-\pi)=t \Rightarrow x=4t+\pi$

$\Rightarrow x=\frac{5}{3}\pi$ or $x=\frac{13}{3}\pi$ or $x=\frac{29}{3}\pi$

이를 바탕으로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구해보자.



점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리를 $h(0 < h \le 6)$라 하자.

삼각형 PAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$

넓이의 최댓값은 $\overline{AB}=8\pi$, $h=6$일 때이다.

따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 8\pi\times 6=24\pi \Rightarrow k=24$이다.

답 24

Tip 사실 이 문제에서는 A, B의 좌표를 구하지 않아도 답을 구할 수 있다. 점의 좌표가 중요한 것이 아니라 $\overline{AB}$의 길이가 중요하기 때문이다.

주어진 구간에서 $\overline{AB}$의 최댓값은 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$의 주기 8π와 같으므로 넓이의 최댓값을 보다 빠르게 구할 수 있다. 혹시나 점 A, B좌표를 구하는데 조금이라도 시간이 걸렸거나 어려웠다면 익숙해지도록 반드시 체화시키자.

097

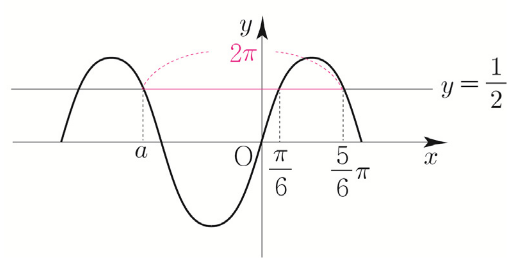
$f(x)=\sin 6x$

x에 $\frac{\pi}{2}-t$를 대입하면

$f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin 6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin(3\pi-6t)=\sin 6t$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+f(t)=1 \Rightarrow 2\sin 6t=1 \Rightarrow \sin 6t=\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2}$를 만족시키는 음수 x의 최댓값을 a라 하면



$\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7}{6}\pi=a$ 이므로

(물론 대칭성을 이용해서 구해도 된다.)

$f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+f(t)=1$을 만족시키는 음수 t의 최댓값은

$6t=a \Rightarrow t=-\frac{7}{36}\pi$이다.

답 ②

106

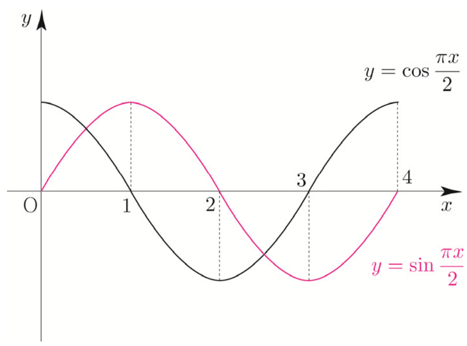
방정식 $\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$의 서로 다른 실근은

두 곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$와 직선 $y=t$의

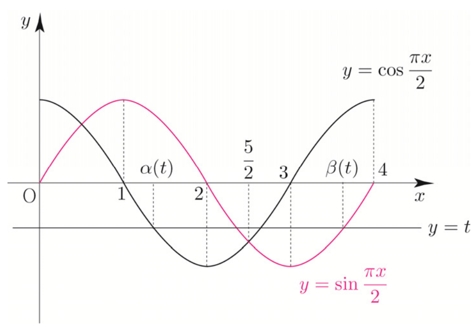
교점의 x좌표이다.

ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여
$\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

두 곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$를 그리면 다음과 같다.



직선 $y=t$ $(-1\le t<0)$를 그려 $\alpha(t)$, $\beta(t)$를
나타내면 다음과 같다.



대칭성에 의해서 $\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow\alpha(t)+\beta(t)=5$

이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$0\le\alpha(t)<4$, $0\le\beta(t)<4$이므로 $t=0$일 때,
$\beta(0)=3$, $\alpha(0)=0\Rightarrow\beta(0)-\alpha(0)=3$

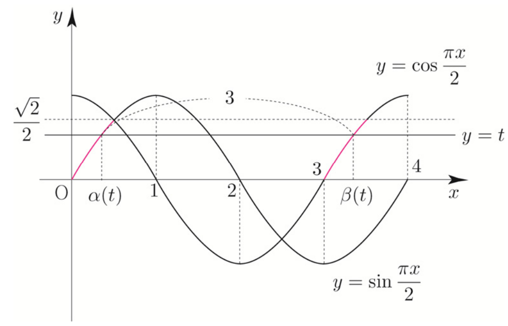
즉, $\beta(t)-\alpha(t)=3$을 만족시키는 t의 범위가

$0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$인지 조사하면 된다.

① $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3$

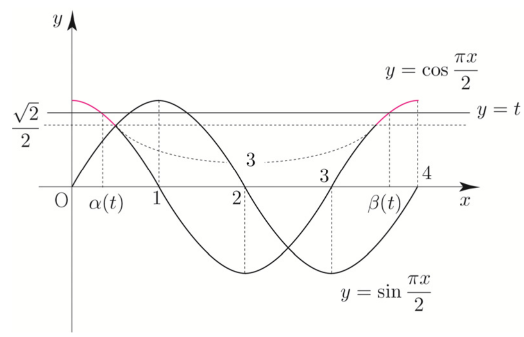
$t\ne0$이면 다음과 같다.



두 곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$은 서로 평행이동

관계이므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$이 성립한다.

② $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,

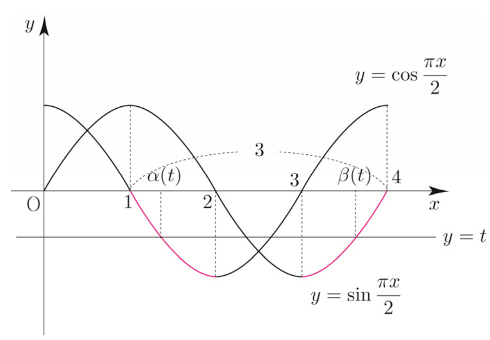


$3<\beta(t)-\alpha(t)<4$

③ $t=1$일 때,

$\beta(1)=1$, $\alpha(1)=0\Rightarrow\beta(1)-\alpha(1)=1$

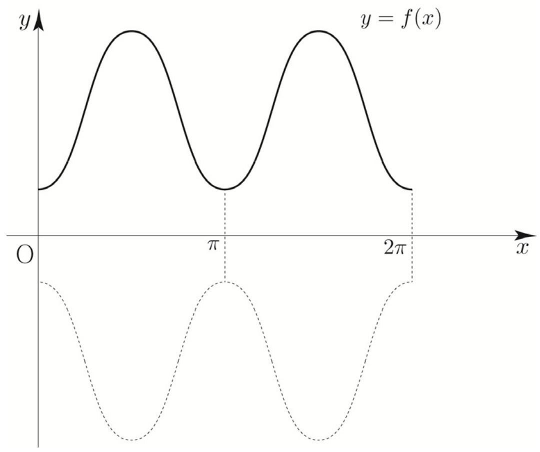
④ $-1\le t<0$일 때,



$1\le\beta(t)-\alpha(t)<3$

①, ②, ③, ④에 의해서

$\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=3\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

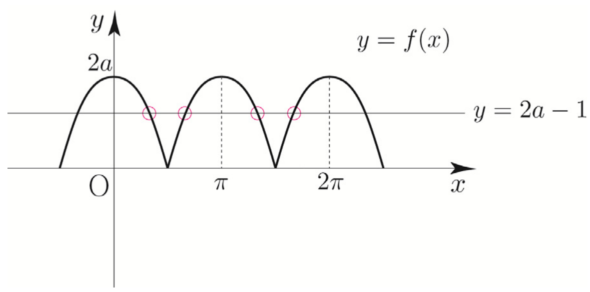


①의 경우 최댓값과 최솟값의 절댓값이 서로 같아야 하므로
$(a-2)(b-2)=0 \Rightarrow a=2$ or $b=2$이다.

$y=2a\cos\frac{b}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{b}{2}}=\frac{4\pi}{b}$이므로

$y=\left|2a\cos\frac{b}{2}x\right|$의 주기는 $\frac{4\pi}{b}\times\frac{1}{2}=\frac{2\pi}{b}$이다.

함수 $f(x)$의 주기는 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi \Rightarrow b=2$이다.



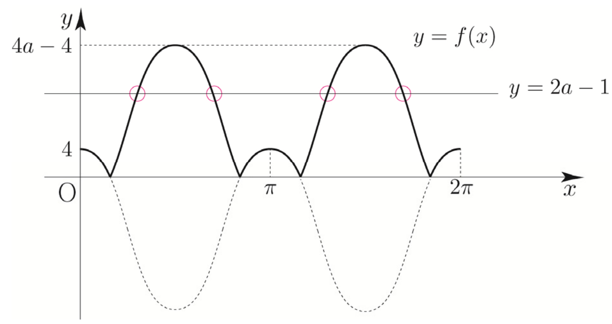
위 그림과 같이 $b=2$일 때, (나) 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $1 \le a \le 10$이므로 자연수 a, b의 순서쌍의 개수는 10이다.

②의 경우 함수 $y=2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)$의 주기가 π

이므로 $\frac{4\pi}{b}=\pi \Rightarrow b=4$이다.

$f(x)=|2a\cos2x-2(a-2)|$

$y=2a\cos2x-2(a-2)$의 최댓값은 4이고,
최솟값은 $-4a+4$이므로 $f(x)$를 그리면 다음 그림과 같다.



$y=2a\cos2x-2(a-2)$의 최솟값이 음수이어야 하므로
$-4a+4<0 \Rightarrow 4<4a \Rightarrow 1<a$이다.

$b=4$일 때, (나) 조건을 만족시키려면

$4<2a-1<4a-4 \Rightarrow 5<2a\ ,\ 3<2a \Rightarrow \frac{5}{2}<a$

이어야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 a의 값의 범위는 $\frac{5}{2}<a\le 10$이므로

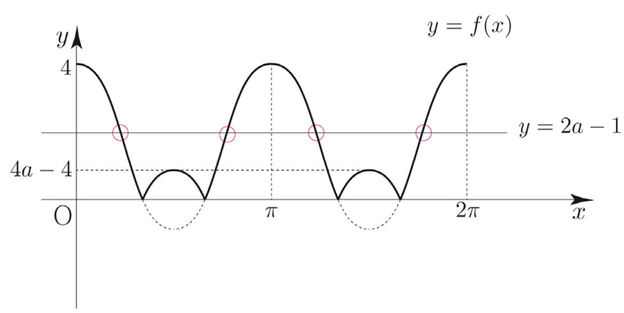
자연수 a, b의 순서쌍의 개수는 8이다.

③의 경우 함수 $y=2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)$의

주기가 π이므로 $\frac{4\pi}{b}=\pi \Rightarrow b=4$이다.

$f(x)=|2a\cos2x-2(a-2)|$

$y=2a\cos2x-2(a-2)$의 최댓값은 4이고,
최솟값은 $-4a+4$이므로 $f(x)$를 그리면 다음 그림과 같다.



$y=2a\cos2x-2(a-2)$의 최솟값이 음수이어야 하므로
$-4a+4<0 \Rightarrow 4<4a \Rightarrow 1<a$이다.

$b=4$일 때, (나) 조건을 만족시키려면

$4a-4<2a-1<4 \Rightarrow 2a<3\ ,\ 2a<5 \Rightarrow a<\frac{3}{2}$

이어야 한다.

$1<a<\frac{3}{2}$을 만족시키는 자연수 a의 값은 존재하지 않으므로

모순이다.