규 토
라이트
N 제

CONTENTS

규토 라이트 N제

오리엔테이션

규토 라이트 N제

책소개

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기 위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다 보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과 개념, 실전 개념, 예제, 개념 확인문제, ‘규토의 Tip’을 모두 담았습니다.
단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**raining – 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여
수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**raining – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도
1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야 하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

단순히 유형서가 아니라 생기초부터 점점 살을 붙여가며 기출킬러까지 다루는 올인원 교재입니다.
즉, 교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 라이트 N제 수2의 경우 총 796제이고
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당 과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야 할지 갈피를 못 잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

규토 라이트 N제

검토후기

문지유 / 울산대학교 의학과

규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Traning – 1Step), 단원별 역대 기출들(Training – 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.
벌써 제가 규토 N제 교재 검토를 한지도 4년차에 접어들었네요. 최대한 꼼꼼히 검토하는 편인데도 항상 놓치는 게 있을까 떨리네요. 새해가 밝아 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

윤승하 / 울산대학교 의예과

이번에 규토 라이트 N제 수1 수열 부분을 검토한 울산대 의예과 24학번 윤승하입니다.
규토 라이트 N제의 추천 대상이 아직 수학에 대한 정리가 완벽하게 되지 않은 학생인 만큼, 개념에 대한 정리와 준킬러 문제까지의 징검다리 역할을 하는 것이 중요하다고 생각했고 검토하면서 규토 라이트 N제가 이러한 역할을 잘 수행한다고 느꼈습니다.
교과서 개념은 물론이고 학생들이 자주 실수하는 부분, 문제에 적용할 수 있는 스킬 등 문제를 푸는 데 필요한 모든 개념을 수록했습니다.
또한 문제의 난이도를 총 4단계로 나누어 준킬러•킬러 문제를 풀 때까지 문제의 난이도가 완만하게 높아지도록 문제를 배치하였습니다.
저 또한 수능을 준비하면서 다양한 문제집을 풀어보았지만, 규토 라이트 N제와 같이 수학 초보자가 어려운 4점 문제까지 풀 수 있도록 이끌어주는 문제집은 잘 접해보지 못했습니다. 개념이 부족하거나 기출 문제가 어렵게 느껴지는 학생들께 이 문제집을 추천하고 싶습니다!

정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 벌써 한 해의 입시가 시작되는 봄이네요. 새로운 1년이 시작하기 무섭게 새로운 문제집이 출판되고, 풀린다는 생각을 하니 저자님과 수험생들의 열의가 느껴지는 것만 같습니다.
규토 라이트 N제 수학2에는 교과서적 풀이와 빠른 풀이를 모두 제공하며, 필요하다면 미적분 영역의 내용까지 제공합니다.
이렇게 폭넓은 내용을 제공하고 있어서, 규토가 제공하는 내용을 모두 받아들일 수 있다면 어떤 유형의 문항이든 무리없이 해결할 수 있는 능력이 길러질 것입니다. 이처럼 학생들의 문제 해결 능력을 길러주면서도, 너무 부담스럽지 않게 읽히는 점이 규토 라이트 N제 수학2의 가장 큰 장점이라고 생각합니다. 높은 완성도와 좋은 가독성을 겸비한 좋은 N제입니다.
과정은, 결과로 미화된다는 생각을 종종 합니다. 여러분의 올 한해 수험 생활은 분명 쉽지 않을거에요. 공부의 스트레스, 불안감... 많은 것들이 여러분을 괴롭힐 것 같습니다. 하지만 올 한해가 끝났을 때, 그 모든 과정이 좋은 기억으로 남을 수 있을 만큼 좋은 결과를 얻을 수 있으시기를 기원합니다. 감사합니다.

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해 주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.

기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 기출 문제가 부족한 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 활용 단원에서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제 만의 큰 장점이라고 생각합니다.

저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 현재 수능은 시간을 꽤 필요한 준킬러 수준의 문제들이 거의 반을 차지합니다. 이러한 문제들을 공략하기 위해서는 문제해결 능력을 길러야 할 뿐만 아니라, 문제들을 빠르고 정확하게 풀 수 있어야 합니다.

이러한 수능에 최적화된 문제해결 능력을 기르게 해주는 문제집이 바로 규토 라이트 N제입니다. Guide Step에서는 수능 수학의 기본 개념뿐만 아니라 실전 풀이법을 알려줍니다. Training 1 Step에서 저자가 최신 수능 트렌드를 분석하면서 만든 자작 문제들을 통해 실력을 기를 수 있고, Training 2 Step에서 기른 실력을 기출문제에 바로 적용할 수 있습니다. 마지막 Master Step에서 선별된 어려운 기출과 자작 문제들을 풀면서 심화를 다질 수 있습니다. 문제의 난이도가 절대 쉽지만은 않지만, 저자의 100% 공부법을 통한 꾸준한 반복과 복습을 하면, 어느새 준킬러 수준 이상의 문제들을 술술 푸는 자신을 발견할 겁니다. 올해 수험생 여러분 모두 건승을 기원합니다!

규토 라이트 N제

추천사

정시로 인서울 의대 합격 후기, 규토 라이트 N제 추천사 (윤종원)

안녕하세요. 저는 규토의 도움으로 이번에 인서울 의대에 정시로 합격하게 된 학생입니다. 저는 총 세 번의 수능을 치르면서 규토 라이트 N제의 효과를 몸소 느끼게 되어서 이번 추천서를 작성하게 되었습니다.

우선 저는 22, 23, 24, 총 세 차례의 수능을 겪은 삼수생입니다. 첫 수능에서는 간신히 2등급 컷트라인을 맞췄고, 두 번째 수능에서는 1등급 컷 점수를, 마지막 수능에는 원점수 96점을 받으며 성공적으로 입시를 마칠 수 있었습니다. 제가 이렇게 성적을 향상한 데에는 규토 라이트 N 제가 정말 큰 도움을 주었습니다.

제가 고등학교 3학년일 때, 저는 오르지 않는 수학 성적을 두고 정말 많이 고민했는데요, 사실 그때는 제가 정확히 어느 부분이 부족한지, 또 어느 부분을 잘하는지 잘 알지도 못했습니다. 그저 최고난도 문항(킬러문항)이 풀리지 않으니 그저 어려운 문제만 끊임없이 반복해서 풀었었죠. 그렇게 실망스러운 22 수능 성적을 받고, 재수를 결심한 이후로는 아예 개념부터 다지기로 생각했고, 그때 제가 개념을 다질 때 도움을 받은 책이 규토 라이트 N제였습니다.

이 책은 정말 낮은 난도의 문제부터, 최고난도라고 해도 손색이 없을 정도의 문제들까지 다양하게 수록이 되어있습니다. 특히 규토님이 직접 만드신 문제들이 정말 높은 퀄리티를 보여주며 문제를 풀수록 감탄하게 만들죠. 문제에 대한 평가는 여러분이 직접 풀면서 몸으로, 손으로 느끼는 것이 가장 정확하니 말을 아끼지만, 여타 시중의 다른 문제집들과 비교했을 때 절대 뒤지지 않는, 오히려 압도하는 품질을 보여준다는 것만은 명백합니다.

하지만, 문제의 퀄리티가 아무리 좋다 하더라도 본인이 체화하지 못한다면 소용이 없을겁니다. 그러나 규토 라이트 N제는 그럴 걱정이 없습니다. 문제집보다 훨씬 두꺼운 해설지를 보시면 아시겠지만, 마치 과외선생님이 옆에서 하시는 말씀을 그대로 옮겨적은 것만 같은 해설지는 문제의 해설보다도 학생의 이해를 최우선으로 두고 작성되었습니다. 헷갈릴 만한 포인트들은 옆에 다른 문제들을 이용해서 추가로 설명을 해준다거나 하는 식으로 구성된 해설은 마치 수준이 높은 과외선생님이 옆에 있다는 착각마저 들게 합니다.

그렇다 보니 이 규토 라이트N제를 완벽하게 습득하기 위해서는 답지를 어떻게 이용하는지가 굉장히 중요합니다. 규토의 100% 공부법을 읽어보시면 아시겠지만, 문제를 맞히더라도 내가 어떻게 맞추었는지 그 풀이법을 나 자신이 인지하고 있는 것이 굉장히 중요합니다. 내가 푼 방법에 논리적 비약이 있지는 않았는지, 내가 정확한 방법으로 푼 건지 끊임없이 점검해야 하죠. 이럴 때 답지가 정말 유용하게 사용됩니다. 정확하고 세심한 풀이를 통해, 빠뜨린 부분은 없는지, 넘겨짚은 부분은 없는지 끊임없이 옆에서 점검해 줍니다. 위에서 서술한 바와 같이, 과외를 받는 기분이 들 정도로요.

그렇다면 여기서 궁금한 점이 생기실 겁니다. 과연 규토 라이트 N제는 나에게 맞는 문제집일까? 너무 어렵지는 않을까? 혹은 너무 쉽지는 않을까? 위 질문에 대한 답은, 여러분의 실력에 따라 달라지게 됩니다. 냉정히 말해서 규토 라이트 N제는 이름과는 다르게 라이트하기만 한 문제집은 아닙니다. 아무것도 모르는 상태에서, 즉 기초가 다져지지 않은 상태에서 하기에는 쉽지 않죠. 하지만, 개념을 한 번이라도 봤다면 얼마든지 도전할 수 있는 난이도입니다. 문제집의 구조상 난이도별로 파트가 나누어지기도 하고, 답지와 함께 풀면 조금 어렵더라도 이해하기에 어렵지는 않을 겁니다. 그렇다면 최상위수험생들에게는 필요가 없는 문제집일까요? 그렇지도 않습니다. 최상위수험생이더라도 틀리는 문제가 있다면 어딘가 불안정한 부분이 있다는 뜻입니다. 규토 라이트N제는 흔들리는 기초를 단단하게 굳힐 수 있는 교재입니다. 혹시라도 내가 불안한 부분은 없는지, 나의 약점은 없는지 등을 알 수 있는, 그러한 교재입니다. 내가 지금껏 쌓아온 기초에 불안한 부분은 없는지, 내가 안다고 생각했던 부분에 허점은 없는지 점검할 때에도 규토 라이트 N제는 최고의 파트너가 되어줄겁니다.

내가 가야 할 길이 멀게만 느껴질 때, 내가 지금 하고 있는 방법이 옳은 방법인지 알 수 없을 때, 규토 라이트 N제는 여러분의 곁에서 충실히 길잡이 역할을 해줄겁니다. 그렇게 규토와 함께, 문제 하나하나를 곱씹으며 나아가다 보면 그 길의 끝에는 여러분이 목표하고 있던 수학 성적이 여러분을 기다리고 있을 것입니다.

규토와 함께하게 된 여러분을 진심으로 응원하며, 이만 글을 줄이겠습니다. 감사합니다.

규토 라이트 N제와 함께 1년 내내 수학 모의고사 1등급!! (김준한)

–4등급부터 시작해서 현재 수학 백분위 99%까지 달성 후기–

안녕하세요~ 저는 작년 고1 때는 모의고사 성적이 3,4등급에 머물러 있다가 올해 규토 라이트 N제 수1,2로 공부하면서 2022년에 시행된 고2 6,9,11월 모의고사에서 모두 1등급을 쟁취하게 되어 추천사를 작성하게 되었습니다. 제가 이 책을 처음 접했을 때 책의 구성도 물론 좋았지만 가장 눈에 들어온 것은 공부법이었습니다. 성적대가 낮은 학생들이 공부해도 큰 효과를 볼 수 있는 책이지만 평소에 수학 공부법에 회의감을 가지고 있는 학생들도 공부하면 더 큰 효과를 볼 수 있을 거라고 생각합니다!

고등학교 1학년 때의 저는 수학을 아주 잘하지도 못 하지도 않는 학생이었습니다. 단지 다다익선이라는 말처럼 시중에 나와 있는 문제집을 다 풀어 보며 성적이 잘 나오겠지하며 기대하는 학생에 불과했습니다. 그랬던 성적이 3등급이었고 저는 심각한 고민에 빠졌습니다. 그러던 도중에 한 커뮤니티 사이트에서 ‘규토 라이트 N제’ 후기를 보았습니다. 후기를 읽어보며 나도 저런 드라마틱한 성장을 이뤄낼 수 것 같다는 느낌을 받았고 그 중심인 ‘100% 공부법’을 알게 되어 바로 책을 구입하게 되었습니다.

규토 라이트 N제를 보면서 구성이 참 놀라웠습니다. 현 교육과정에 따른 개념이 모두 수록되어 있을 뿐만 아니라 규토님 특유의 테크니컬한 팁들이 다 들어 있어서 자작문제 (t1)에 적용하여 체화를 시키고 이에 따라 배운 것들을 기출문제 (t2)에 또 적용할 수 있어 개념–기출의 괴리감을 최소화 시켜준다는 장점이 있습니다. 그리고 규토 라이트 N제의 고난도 문제의 집합이라고 할 수 있는 마스터 스텝 (mt) 인데 저는 개인적으로 푸는 데 너무 재밌었습니다. 저는 문제를 풀면서 규토쌤이 괜히 문제 배치를 마지막에 하신 게 아니구나라는 것을 느꼈습니다. 이 문제들은 약간 방금 전에 언급한 t1,t2 문제들을 믹스 시킨 문제, 즉 기본 예제 들의 집합이라고 느꼈습니다. 마스터 스텝 문제까지 책의 공부법으로 완전히 흡수시켜야 비로소 책의 취지에 맞게 안정적인 1등급에 도달한다고 느끼게 되었습니다.

이제 공부법에 대해 얘기해보려 합니다. 사실 제가 제일 강조하고 싶은 부분입니다!! 제 성적향상의 근원이기도 합니다ㅎ 올해 3월달...저의 수학 성경책을 받은 날이었죠..저는 책과 물아일체가 되겠다는 마음가짐으로 임했습니다. 규토 선생님께서 강조하시는 수학 공부법이 처음에는 어색했지만 계속 적용해보니까 수능 수학에 가장 이상적이고 적합한 방법이라는 것을 깨달았습니다. 제가 세 번의 모의고사에서 1등급을 받은 그 공부법! 100% 공부법의 핵심은 “누군가에게 설명할 수 있다”입니다. 사실 혹자께서는 문제를 잘 푸는 거랑 어떤 차이냐고 물으실 수 있는데 사실은 엄청난 차이가 있다고 생각합니다. 문제를 완벽하게 설명하려면 풀이를 써 내려갈 때 개념 간의 논리를 정확하게 이해하고 남을 이해시킨다는 마음으로 문제를 정확히 자기것으로 만들어야 합니다. 저는 이 과정이 정말 힘들었습니다. 하지만, 계속 거듭하고 묵묵히 하다보니 가속도가 붙더라고요! 내년에 공부하실 2024 규토 수험생 분들도 이 부분을 강조하며 공부하시면 충분히 좋은 결과 있으실 거라고 믿습니다!!

마지막으로 규토 선생님! 제 수학 성적을 눈부시게 끌어올려 주셔서 감사합니다! ㅎㅎ

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

-규토 N제 수1,수2,미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기-

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제'입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신있게 추천드립니다.
[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(쎈)과 규토 라이트N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제(30번)까지 모두 다룹니다. 과장없이 미적분2022평가원문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주시는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독 밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사설 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데요, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. ‘theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같게 느껴질 때 비로소 이해한 것’ 이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2 학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해봐야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까.교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에선 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됬고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제양과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 〈1 step〉 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 〈2 step〉 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됬던 step이었습니다. 하지만 이 단계부턴 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 〈2 step〉만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리하실 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. 〈2 step〉를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다. 마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘드신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무

두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다.

많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, “이 책을 공부하는 방법(?)”이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갉아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했었던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

규토 라이트 N제

함수의 극한과 연속

Guide step

개념 익히기편

1. 함수의 극한

01

함수의 극한과 연속

함수의 극한

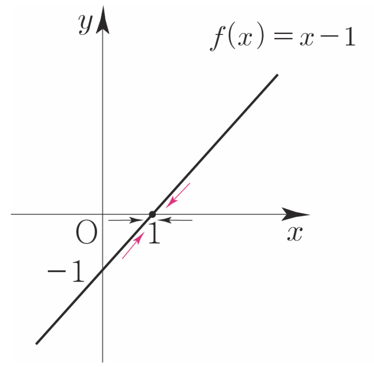
성취 기준 - 함수의 극한의 뜻을 안다.

개념 파악하기 (1) 함수의 수렴이란 무엇일까?

함수의 수렴

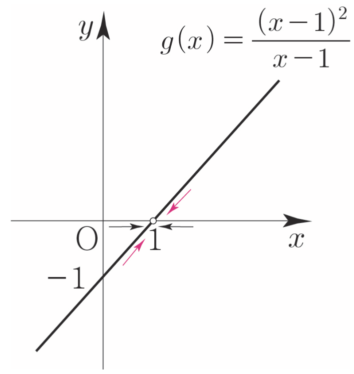
함수 $f(x)$에서 x의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값에 한없이 가까워지는 경우에 대해 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=x-1$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

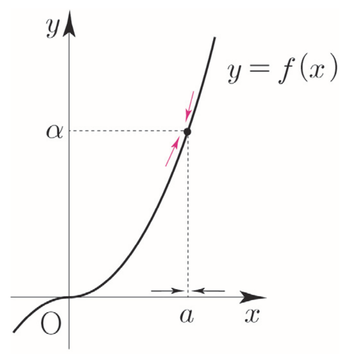


한편, 함수 $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$은 $x=1$에서 분모가 0이 되어 정의되지 않지만, $x\neq1$인 모든 실수 x에서 $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=x-1$이다.

따라서 오른쪽 그림과 같은 함수 $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

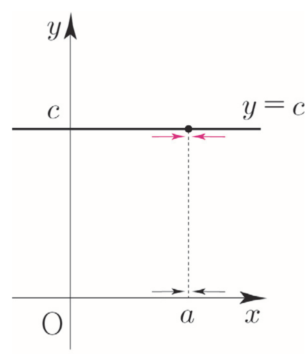


함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 **수렴**한다고 한다.
이때, α를 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 기호로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$ 또는 $x\to a$일 때, $f(x)\to\alpha$와 같이 나타낸다.



예를 들어 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=0$로 나타낸다.

특히, 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 실수 x에서 함숫값이 항상 c이므로 a의 값에 관계없이 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}c=c$이다.



Tip 1 기호 $\lim$는 limit(극한)의 약자이다.

Tip 2 그래프를 통해 직관적으로 이해하면 된다.

Tip 3 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$은 $f(a)=\alpha$와 다른 의미이다.

위의 예처럼 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x-1}$에서 $g(1)$은 정의되지 않지만 $\lim_{x\to 1} g(x)=0$ 이다.

예제 1

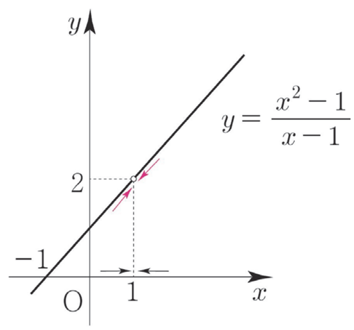
극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$를 그래프를 이용하여 구하시오.

풀이

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$라 하면 $x\neq 1$일 때, $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to 2$이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$이다.



Tip 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않을 때도 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재할 수 있음에 유의하자.

개념 확인문제 1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.

(1) $\lim_{x\to -1}(x^2+1)$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

규토 라이트 N제

함수의 극한과 연속

Training – 2 step

기출 적용편

1. 함수의 극한

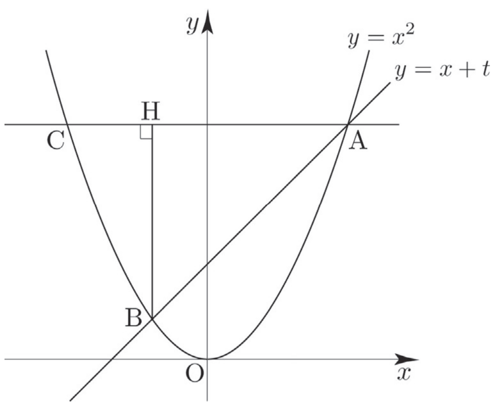
076 • 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)

[4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5



077 • 2022년 고3 10월 교육청 공통

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

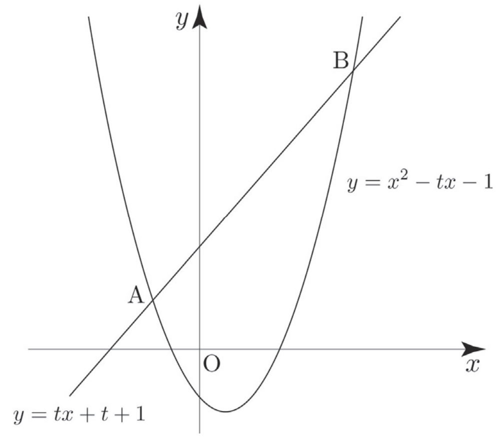
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이다.

078 • 2023년 고3 10월 교육청 공통

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때,

$\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{AB}}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$



함수의 극한과 연속

Theme 5

연속함수의 활용

025

실수 t에 대하여 원 $x^2+y^2=2$과 함수 $f(x)=|x-t|$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=a-b$, $t=2a$에서 불연속일 때, $a+2b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고 $b>0$이다.)

026

실수 t에 대하여 함수 $\dfrac{x}{x^2+2tx+t}$가 불연속인 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $\sum_{k=1}^{4} f(k-2)g(k)$의 값을 구하시오.

027

함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & (x<0) \\ x^2+4 & (x \geq 0) \end{cases}$가 있다.
실수 t에 대하여 직선 $y=tx$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 열린구간 $(-\infty, a)$에서 연속일 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오.

규토 라이트 N제

미분

개념 파악하기 (4) 미분가능성과 연속성은 어떤 관계가 있을까?

미분가능성

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

Tip 즉, 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재하려면 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이어야 한다.

이때, 우극한값 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\left(=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$가 존재하면 이 값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **우미분계수**라 하고, 좌극한값 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\left(=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$가 존재하면 이 값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌미분계수**라 한다. 다시 말해 "함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다"는 말은 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같다는 의미이다.

미분가능성과 연속성의 관계

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하므로

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

이때 위 정리의 역은 성립하지 않는 것에 유의하자.
즉, $x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 반드시 미분가능한 것은 아니다. (예제 5)

미분가능한 함수 $\subset$ 연속인 함수 $\subset$ 함수

Tip "함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다." 의 대우는
"함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다." 이다.
즉, 어떤 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능한지 알고 싶다면 처음으로 해야 할 것은
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속하는지 여부를 조사하는 것이다.

미분

규토 라이트 N제

미분

Master step

심화 문제편

1. 미분계수와 도함수

080

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(2x+1)=f(x)+3x^2-ax$이다.
> (나) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 $-\frac{1}{2}$에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 b이다.

$10(b-a)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

081 • 2015년 고3 3월 교육청 B형

삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

082

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x < 0) \end{cases}$$

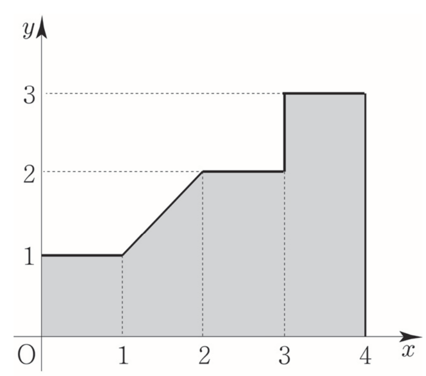
가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때,
> $\lim_{t \to c+} h(t)+h(c)=\lim_{t \to c-} h(t)$이다.

$a+2b+3c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

083 • 2014학년도 수능예비시행 A형

좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, $(0,\ t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

087 • 2023학년도 사관학교 공통

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

088 • 2019년 고2 11월 교육청 가형

상수 a와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-x+a)f(x)$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=0$

(나) $g'(1)\neq 0$

(다) $f(\alpha)=f'(\alpha)$이고 $g'(\alpha)=2f'(\alpha)$인 실수 α가 존재한다.

$g(\alpha+4)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

01 미분
접선의 방정식

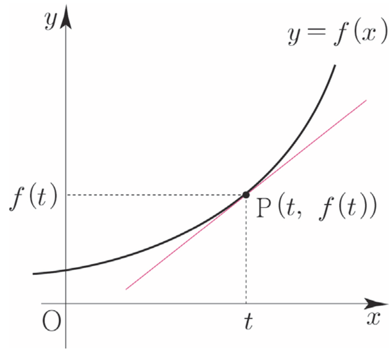
성취 기준 - 접선의 방정식을 구할 수 있다.

개념 파악하기 **(1) 접선의 방정식은 어떻게 구할까?**

접선의 방정식 유형 ① 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

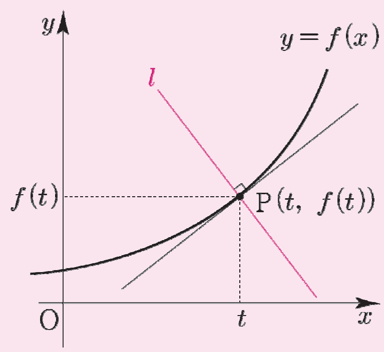
함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능할 때,
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의
접선의 기울기는 $x=t$에서의 미분계수 $f'(t)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 접선은
점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 $f'(t)$인 직선이므로
접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.



Tip 1 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m(x-a)+b$이다.

Tip 2 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$를 지나고
이 점에서의 접선에 수직인 직선 l의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ (단, $f'(t)\neq 0$) 이다.



예제 1

다음 물음에 답하시오.

(1) 곡선 $y=x^2+x+2$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 곡선 $y=2x^2-x$ 위의 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이

(1) $f(x)=x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=2x+1$
점 $(1,\ 4)$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+4$이므로 $y=3x+1$이다.

(2) $f(x)=2x^2-x$라 하면 $f'(x)=4x-1$
점 $(-1,\ 3)$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$이다.
이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $f'(-1)\times m=-1$이므로 $m=-\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{5}(x+1)+3$이므로 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{16}{5}$이다.

개념 확인문제 1 다음 물음에 답하시오.

(1) 곡선 $y=-x^2+4x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 곡선 $y=2x^3$ 위의 점 $(1,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

접선의 방정식 유형 ② 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 한다.
② $f'(t)=m$임을 바탕으로 t의 값을 구한다.
③ t의 값을 $y=m(x-t)+f(t)$에 대입하여 직선의 방정식을 구한다.

Tip 접점의 x좌표를 모르니 미지수를 도입하자!

예제 2

곡선 $y=x^2+1$에 접하고 기울기가 4인 접선의 방정식을 구하시오.

풀이

$f(x)=x^2+1$라 하면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이고
$f'(t)=2t=4$ 이므로 $t=2$이다.
즉, 기울기가 4인 접선의 접점의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=4(x-2)+5$ 이므로 $y=4x-3$이다.

개념 확인문제 2 다음 곡선에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하시오.

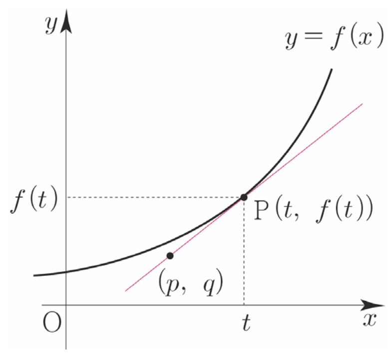
(1) $y=-x^2$

(2) $y=2x^2-6x$

접선의 방정식 유형 ③ 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 위에 있지 않은 점 $(p,\ q)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 한다.
② 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$를 구한다.
③ 점 $(p,\ q)$는 접선 위의 점이므로 ②에서 구한 접선의 방정식에 대입하여 실수 t의 값을 구한다.
④ ③에서 구한 t의 값을 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.



Tip 자주 틀리는 유형이니 메커니즘을 완벽히 숙지하도록 하자!

예제 3

점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=x^2+3$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

풀이

$f(x)=x^2+3$라 하면 $f'(x)=2x$이다.
접점의 좌표를 $(t,\ t^2+3)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $2t$이므로
접선의 방정식은 $y=2t(x-t)+t^2+3 \Rightarrow y=2tx-t^2+3$
이 직선이 $(1,\ 0)$을 지나므로 $0=2t-t^2+3 \Rightarrow t^2-2t-3=0 \Rightarrow (t-3)(t+1)=0 \Rightarrow t=-1$ or $t=3$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $t=-1$일 때, $y=-2x+2$이고 $t=3$일 때, $y=6x-6$이다.

개념 확인문제 3 다음 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=-x^2-2x,\ (-1,\ 2)$

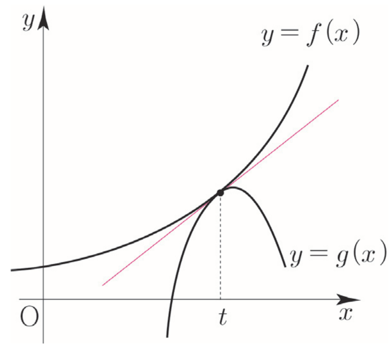
(2) $y=x^2-x,\ (1,\ -1)$

접선의 방정식 유형 ④ 두 곡선에 동시에 접하는 접선

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선은 다음과 같이 case분류할 수 있다.

(1) 접점의 x좌표가 동일한 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $x=t$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선이 서로 일치하므로 다음과 같은 방법으로 구한다.

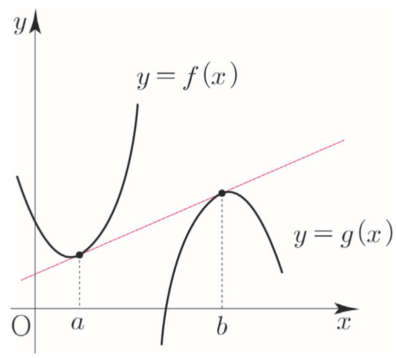


① $x=t$에서의 함숫값이 같다. $\Rightarrow$ $f(t)=g(t)$
② $x=t$에서의 접선의 기울기가 같다. $\Rightarrow$ $f'(t)=g'(t)$

(2) 접점의 x좌표가 동일하지 않은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ g(b))$에서의 접선이 서로 일치한다.
$y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수, $y=g(x)$의 $x=b$에서의 미분계수, 두 점 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ g(b))$를 지나는 직선의 기울기가 모두 같으므로 다음과 같은 방법으로 구한다. (단, $a\neq b$)

$$f'(a)=g'(b)=\frac{g(b)-f(a)}{b-a}$$



Tip

$y=f'(a)(x-a)+f(a)=f'(a)x-af'(a)+f(a)$와
$y=g'(b)(x-b)+g(b)=g'(b)x-bg'(b)+g(b)$가 같아야 하므로
① 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(a)=g'(b)$
② y절편이 같다. $\Rightarrow -af'(a)+f(a)=-b\,g'(b)+g(b)$

$$\Rightarrow -af'(a)+f(a)=-bf'(a)+g(b)\ (\because f'(a)=g'(b))$$

$$\Rightarrow f'(a)=\frac{g(b)-f(a)}{b-a}\quad(\because\ a\neq b)$$

따라서 $f'(a)=g'(b)=\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}$이다.

예제 4

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$이 $x=t$에서 동시에 접할 때, 접선의 방정식을 구하시오.

풀이

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 접하면 $f(t)=g(t)$ 이고 $f'(t)=g'(t)$이므로

$t^3-t=t^2-1 \Rightarrow t^3-t^2-t+1=0 \Rightarrow (t-1)^2(t+1)=0 \Rightarrow t=1$ or $t=-1$

$3t^2-1=2t \Rightarrow 3t^2-2t-1=0 \Rightarrow (3t+1)(t-1)=0 \Rightarrow t=1$ or $t=-\frac{1}{3}$

즉, $t=1$이므로 $f'(1)=g'(1)=2$이고 $f(1)=g(1)=0$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=2(x-1)$ 이므로 $y=2x-2$이다.

개념 확인문제 4 두 곡선 $y=-x^3+x$, $y=x^2-1$가 $x=t$에서 동시에 접할 때, 접선의 방정식을 구하시오.

미분

개념 파악하기 (6) 함수의 극대와 극소란 무엇일까?

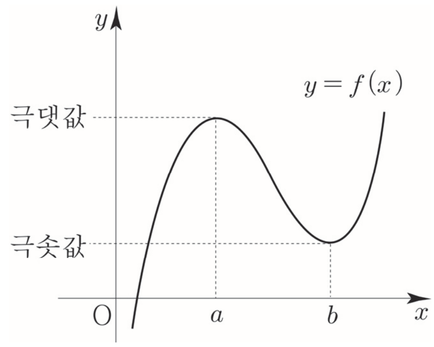
함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하고,
그 때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

② $f(x) \ge f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하고,
그 때의 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

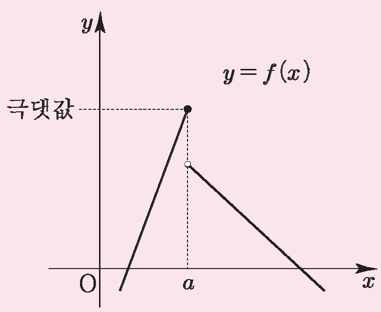
극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



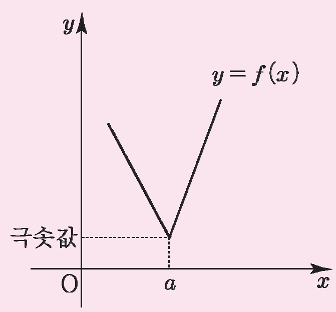
Tip 1 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간이라는 뜻은
$x=a$를 포함하는 아주 작은 열린구간이라고 생각하면 된다.

Tip 2 극대 극소의 정의를 보면 $f(x)$가 연속이나 미분가능해야 한다는 전제조건이 없다.
따라서 불연속 혹은 미분가능하지 않아도 함숫값만 존재한다면 극대와 극소가 존재할 수 있다.

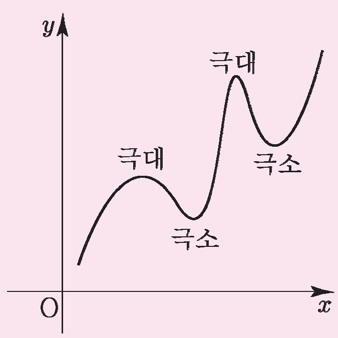
ex $x=a$에서 불연속해도 $x=a$에서 극대



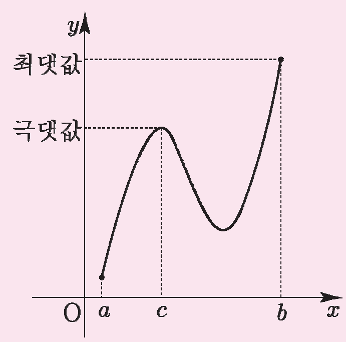
ex $x=a$에서 미분가능하지 않아도 $x=a$에서 극소



Tip 3 극대와 극소는 여러 개 존재할 수 있고 극댓값이 극솟값보다 항상 큰 것은 아니다.



Tip 4 극댓값(극솟값)이 꼭 최댓값(최솟값)은 아니다.



Tip 5 $f(x)$가 상수함수라면 $x=a$에서 극값을 갖는 a는 무수히 많다.
이때 함숫값 $f(a)$는 극댓값도 되고 극솟값도 된다.

04

미분

함수의 그래프

성취 기준 - 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 함수의 그래프의 개형은 어떻게 그릴까?

함수의 그래프의 개형 그리기

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 과정으로 그릴 수 있다.

① 도함수 $f'(x)$를 그린다.

② $f'(x)$의 부호를 판단하여 증감을 고려한 대략적인 $f(x)$를 그린다.

③ 극댓값 or 극솟값 or x절편 or y절편 등을 고려하여 디테일하게 함숫값을 표시한다.

④ 최종적으로 ②+③을 고려하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

Tip 1 ①에서 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$를 그릴 때, y축은 생략가능하다.

Tip 2 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$에서 항상 양수인 부분은 고려하지 않아도 된다.

ex1 $f'(x)=10x(x-1)$이라면 $f'(x)=x(x-1)$라 두고 판단해도 된다.

ex2 $f'(x)=(x^2+1)x$이라면 $f'(x)=x$라 두고 판단해도 된다.

이때 두 번째 $f'(x)$를 Semi 도함수라고 하자. (소통을 위한 필자와의 약속)

Tip 3 위와 같은 방식 즉, 증감표를 그리지 않고 $f'(x)$를 그려서 $f'(x)$의 부호를 판단하려면 x절편을 바탕으로 3차 이상의 다항함수를 빨리 그릴 수 있어야 한다. (방법은 아래와 같다.)

x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [1단계] − 시작 방향 정하기

① 홀수차 함수 ex 일차함수, 삼차함수, …

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

Tip 일차함수를 생각하면 된다.

② 짝수차 함수 ex 이차함수, 사차함수, …

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

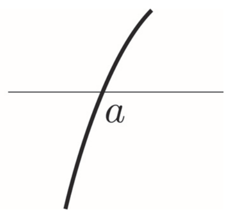
(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

Tip 이차함수를 생각하면 된다.

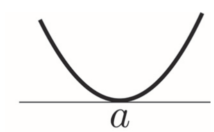
x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [2단계] – x절편 이용하기

$f(x)$가 $(x-a)^n$을 인수로 가질 때, n에 따라 case분류할 수 있다.

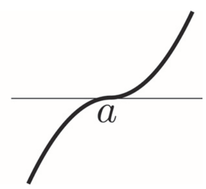
① $n=1 \Rightarrow (x-a)$



② $n=2 \Rightarrow (x-a)^2$ ($n \geq 2$인 짝수)



③ $n=3 \Rightarrow (x-a)^3$ ($n \geq 3$인 홀수)



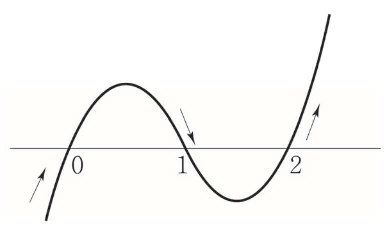
Tip ②은 스치는 접선형태(스접)를 갖고, ③은 뚫는 접선형태(뚫접)를 갖는다.
쉽게 말해서 ②은 $y=x^2$같은 느낌이고, ③은 $y=x^3$같은 느낌이다.

x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [3단계] – 실전연습

ex1 $y=x(x-1)(x-2)$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

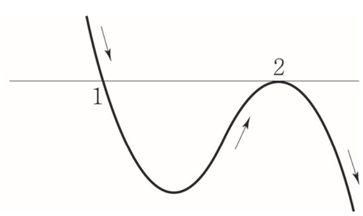
② x절편이 0, 1, 2이고 x, $(x-1)$, $(x-2)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1, 2를 통과해서 그려주면 된다.



ex2 $y=-(x-1)(x-2)^2$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x절편이 1, 2이고 $(x-1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=1$를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



07

미분

삼차함수와 사차함수의 그래프(심화특강)

성취 기준 - 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형을 설명할 수 있다.
- 삼차함수와 사차함수의 특징을 설명할 수 있다.
- 식세우기 Technique을 이용하여 삼차함수와 사차함수에 관한 식을 빠르게 세울 수 있다.

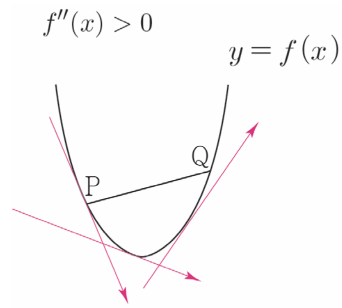
개념 파악하기 (12) 곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있을까?

이계도함수

함수 $f'(x)$의 도함수를 함수 $y=f(x)$의 **이계도함수**라 하고 기호로 $f''(x)$와 같이 나타낸다.

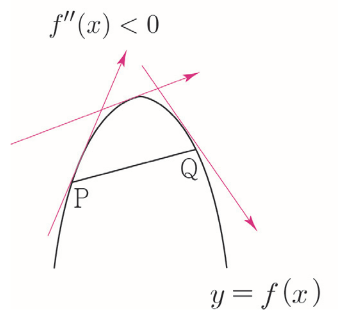
곡선의 오목과 볼록

이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 조사해 보자.
어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여



① 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면
곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 **아래로 볼록**하다고 한다.
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$의
접선의 기울기인 $f'(x)$는 증가하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는
아래로 볼록하다.

ex $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f''(x)=2>0$



② 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 위쪽에 있으면
곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 **위로 볼록**하다고 한다.
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$의
접선의 기울기인 $f'(x)$는 감소하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는
위로 볼록하다.

ex $f(x)=-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x \Rightarrow f''(x)=-2<0$

Tip 1 $f''(x)$는 $f'(x)$의 도함수이므로 $f''(x)$의 부호로 $f'(x)$의 증감을 파악할 수 있다.
즉, $f''(x)$의 부호는 접선의 기울기의 증감에 관련되어 있다.

Tip 2 사실 이계도함수는 수2가 아닌 미적분에서 배우는 내용이다.
하지만 이계도함수를 학습하고 나면 삼차함수와 사차함수를 가볍게 위에서 내려다 볼 수 있다.
그렇게 어려운 개념도 아니고 학습하는 것을 추천한다.

규토 라이트 N제

미분

Master step

심화 문제편

2. 도함수의 활용

254 • 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

정수 $a(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
>
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

255 • 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$　② $3+3\sqrt{2}$　③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$
④ $6+3\sqrt{2}$　⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

256 • 2024학년도 수능 공통

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51　② 52　③ 53
④ 54　⑤ 55

257 • 2024학년도 수능 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$f(k-1)f(k+1)<0$$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 <u>존재하지 않는다</u>.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

[4점]

예제 9

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x x\,t^2\,dt$ 을 구하시오.

풀이

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \int_0^x x\,t^2\,dt$

t에 대해서 적분하는 것이므로 $f(t)$ 안에 있는 x는 상수이므로 $\int$ 앞으로 나올 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\int_0^x x\,t^2\,dt = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x t^2\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(x\times\frac{x^3}{3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{3}\right) = \frac{4}{3}x^3$$

Tip 정적분으로 정의된 함수 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$를 x에 대하여 미분할 때는 $f(t)$ 안의 식에 문자 x가 포함되어 있는지 주의해야 한다. 만약 문자 x가 포함된 경우에는 x를 $\int$ 앞에 위치시키고 곱의 미분법을 이용하여 미분한다. (꼭 기억하자!)

$x=f(x)$, $\displaystyle\int_0^x t^2 dt = g(x)$라 하면 $\dfrac{d}{dx}\left(x\displaystyle\int_0^x t^2\,dt\right) = \dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}$와 같다.

즉, 곱의 미분법으로 처리해주면 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다.

$f'(x)=1$, $g'(x)=x^2$ 이므로

$$\frac{d}{dx}\int_0^x x\,t^2\,dt = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x t^2\,dt\right) = 1\times\int_0^x t^2 dt + x\times x^2 = \frac{x^3}{3}+x^3 = \frac{4}{3}x^3$$

ex1 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x x(t^2+t)dt = \dfrac{d}{dx}\left\{x\displaystyle\int_a^x (t^2+t)dt\right\} = \displaystyle\int_a^x (t^2+t)dt + x(x^2+x)$

ex2 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x (x+1)f(t)dt = \dfrac{d}{dx}\left\{x\displaystyle\int_a^x f(t)dt + \displaystyle\int_a^x f(t)dt\right\}$

$= \displaystyle\int_a^x f(t)dt + xf(x) + f(x)$

물론 다음과 같이 구해도 된다.

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x (x+1)f(t)dt = \dfrac{d}{dx}\left\{(x+1)\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right\}$

$= \displaystyle\int_a^x f(t)dt + (x+1)f(x)$

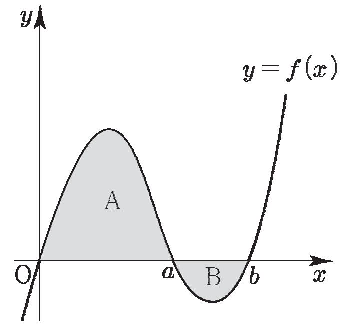
개념 확인문제 10

함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_1^x xf(t)\,dt = x^4 - ax^2$를 만족시킬 때, $f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

적분

개념 파악하기 (4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?

두 곡선 사이의 넓이의 활용



오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.

① A의 표현형은 $\int_0^a |f(x)|dx$이고 계산형은 $\int_0^a f(x)dx$이다.

B의 표현형은 $\int_a^b |f(x)|dx$이고 계산형은 $\int_a^b \{-f(x)\}dx$이다.

Tip 여기서 $\int_a^b f(x)dx=-\mathrm{B}$인 것을 쉽게 알 수 있다.

즉, $f(x)\le 0$일 때(x축 아래에 있을 때) 정적분을 하면 넓이에 마이너스가 붙는다.

② $\int_0^b f(x)dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$

$$\int_0^b f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx=\int_0^a f(x)dx-\int_a^b \{-f(x)\}dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$$

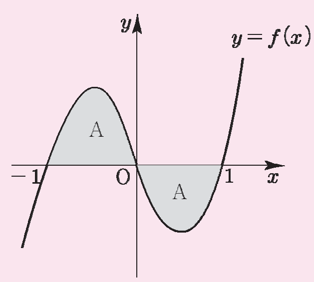
Tip 위와 같이 식으로 접근할 수도 있지만 자연스럽게 곡선 $y=f(x)$가 $a\le x\le b$에서 x축 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx=-\mathrm{B}$(넓이에 마이너스)이니 A에서 B를 빼면 $\int_0^b f(x)dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$가 된다. 라는 사고과정으로 접근하는 것을 추천한다.

즉, A에서 B만큼의 넓이가 상쇄된다고 생각하면 된다.

③ A가 B보다 크니 $\int_0^b f(x)dx>0$ 이다.

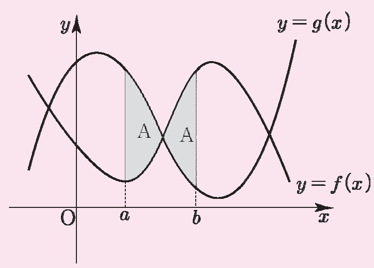
Tip 부정적분과 정적분 단원에서 $f(x)=x^3-x$라 할 때, $f(x)=x^3-x$가 기함수이므로 식 계산에 의해 $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$임을 보였다.

이와 달리 위에서 배운 개념을 바탕으로 넓이로 접근해보자.



곡선 $y=f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx=\mathrm{A}$라 하면

$\int_0^1 f(x)dx=-\mathrm{A}$이므로 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\mathrm{A}-\mathrm{A}=0$이라고 볼 수도 있다. 즉, A에서 A만큼의 넓이가 상쇄되니 0이 된다.



이와 마찬가지로 만약 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 이루어진 두 부분의 넓이가 서로 같을 때,

$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\mathrm{A}-\mathrm{A}=0$이다.

012

$$\lim_{x\to2}(x+2)f(x)=\lim_{x\to2}(x+2)\lim_{x\to2}f(x)=4\lim_{x\to2}f(x)=3$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to2}(x^3+2x)f(x)=\lim_{x\to2}(x^3+2x)\lim_{x\to2}f(x)=12\lim_{x\to2}f(x)$$

$$=12\times\frac{3}{4}=9$$

답 9

Tip

$\lim_{x\to2}f(x)$ 가 수렴하는지 모르는 상태에서

$\lim_{x\to2}(x+2)f(x)=\lim_{x\to2}(x+2)\lim_{x\to2}f(x)$

이 가능한지 궁금할 수 있다.

치환을 통해 $\lim_{x\to2}f(x)$ 가 수렴함을 증명해보자.

$(x+2)f(x)=g(x)$ 라고 치환하면

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x+2}$ 이고 $\lim_{x\to2}g(x)=3$ 이다.

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x+2}=\frac{\lim_{x\to2}g(x)}{\lim_{x\to2}(x+2)}=\frac{3}{4}$$

이므로 수렴함을 알 수 있다.

물론 $\lim_{x\to2}f(x)$ 가 발산하면 $\lim_{x\to2}(x+2)f(x)=3$ 을

만족시키지 않기 때문에 수렴해야만 한다는 것을 직관적으로 판단할 수 있다.

013

$$\lim_{x\to1}\left\{f(x)-\frac{6x}{x+1}\right\}=2,\ \lim_{x\to1}f(x)g(x)=10$$

$$\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}\frac{6x}{x+1}=2\ \Rightarrow\ \lim_{x\to1}f(x)=5$$

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\lim_{x\to1}g(x)=5\lim_{x\to1}g(x)=10$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to1}g(x)=2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(3x+5)f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}(3x+5)\lim_{x\to1}f(x)}{\lim_{x\to1}g(x)}=\frac{40}{2}=20$$

답 20

Tip

12번과 마찬가지로

치환을 통해 $\lim_{x\to1}f(x)$ 가 수렴함을 증명해보자.

$f(x)-\dfrac{6x}{x+1}=h(x)$ 라고 치환하면

$f(x)=h(x)+\dfrac{6x}{x+1}$ 이고 $\lim_{x\to1}h(x)=2$ 이다.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}h(x)+\lim_{x\to1}\frac{6x}{x+1}=5$$

이므로 수렴함을 알 수 있다.

물론 $\lim_{x\to1}f(x)$ 가 발산하면 $\lim_{x\to1}\left\{f(x)-\dfrac{6x}{x+1}\right\}=2$

을 만족시키지 않기 때문에 수렴해야만 한다는 것을

직관적으로 판단할 수 있다.

014

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x^2}-\frac{x+2}{x+1}\right\}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=3$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4+ax^2-2f(x)}{x^2+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+a-\frac{2f(x)}{x^2}}{1+\frac{f(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}x^2+\lim_{x\to0}a-2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}{\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\frac{a-6}{1+3}=5$$

$a-6=20\ \Rightarrow\ a=26$

답 26

Tip

문자가 3개인 방정식은 식이 3개여야 풀 수 있다.
다만 식이 2개면 한 문자로 다른 문자들을 나타낼 수 있다는 사실을 반드시 기억하고 있어야 한다.

ex) $-1+a-b+c=0$, $b=2a-1$
문제에서 주어진 식은 2개이고 문자가 3개 이므로 b와 c를 a로 나타낼 수 있다.

어느 정도 레벨에 도달하면 아래와 같은 사고과정을 느낄 수 있게 된다.

① 식이 두 개고 문자가 3개니까 a로 나머지 문자들을 표현할 수 있겠군
② $f(1) \le 12$로 a의 범위를 알 수 있겠군
③ a의 범위를 아니까 $f(2)$의 최댓값을 구할 수 있겠군

이는 사실 문제를 만들 때, 출제자가 느끼는 사고과정과 유사하다.

① $f(x)$를 그냥 주면 너무 쉬우니까 교과개념을 사용해서 직접 구하게 만들어야겠다.
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$
② $f(2)$의 최댓값을 구하게 하고 싶군.
그렇게 하려면 범위가 필요한데?
③ $f(1) \le 12$ 너로 정했다!

068

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

만약 $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{f(a)}{f(a)}=1$$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고
$f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 둘 수 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-1}{x-b+1}=\frac{a-b-1}{a-b+1}=\frac{3}{5}$$

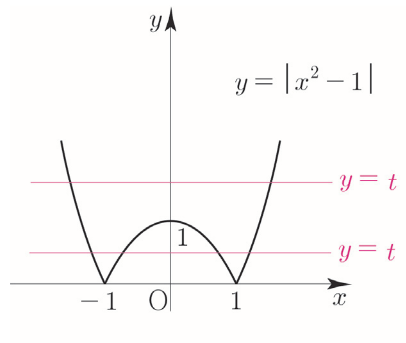
$5(a-b)-5=3(a-b)+3 \Rightarrow a-b=4$
$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 했으므로
$a,\ b$는 각각 $\alpha,\ \beta$이거나 $\beta,\ \alpha$이다.
따라서 $|\alpha-\beta|=4$이다.

답 ④

069

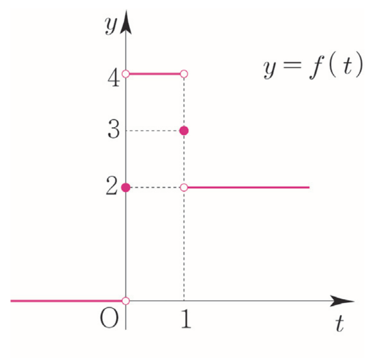
실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 한다.

$y=|x^2-1|$을 그려서 판단해보자.



$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$

이를 바탕으로 $y=f(t)$를 그리면



따라서 $\lim_{t\to 1-}f(t)=4$이다.

답 ④

미분계수와 도함수 | Training – 1 step

1	3	26	76
2	40	27	10
3	45	28	9
4	4	29	2
5	9	30	33
6	13	31	10
7	5	32	20
8	②	33	67
9	6	34	2
10	18	35	23
11	4	36	29
12	5	37	1
13	50	38	12
14	60	39	13
15	10	40	19
16	9	41	32
17	165	42	ㄴ, ㄷ, ㅂ
18	5	43	17
19	8	44	21
20	30	45	3
21	3	46	4
22	6	47	7
23	19	48	48
24	36	49	3
25	7	50	5

001

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{f(a)-f(2)}{a-2}$$

$$\Rightarrow 4=\frac{a^3-3a^2+4}{a-2} \Rightarrow 4a-8=a^3-3a^2+4$$

$$\Rightarrow a^3-3a^2-4a+12=0 \Rightarrow (a-2)(a^2-a-6)=0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a-3)(a+2)=0 \Rightarrow a=3 \ (\because a>2)$$

답 3

002

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(k) \Rightarrow 3=3k^2-1 \Rightarrow 4=3k^2$$

$$\Rightarrow k^2=\frac{4}{3}$$

따라서 $30k^2=40$이다.

답 40

003

방정식 $ax^2=3x$은 $x=2$를 실근으로 가지므로

$4a=6 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{-6}{2}=-3=b$$

따라서 $10(a-b)=10\left(\frac{3}{2}+3\right)=15+30=45$이다.

답 45

004

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3$$

$$=f'(1)\times3=12 \Rightarrow f'(1)=4$$

답 4

로피탈의 정리를 사용하면

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3f'(1+3h)}{1}$$

$$=3f'(1)=12 \Rightarrow f'(1)=4$$

$j(x)=-xg(x),\ k(x)=(-2x+1)g(x)$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=k'(1)=-2g(1)-g'(1)$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=j'(1)=-g(1)-g'(1)$$

$-2g(1)-g'(1)=-g(1)-g'(1)$

즉, $g(1)=0$

$g(0)=g'(0)=g(1)=0$이므로 $g(x)=x^2(x-1)$이다.
따라서 $g(4)=16\times3=48$이다.

답 48

Tip

$f(x)$가 다항함수일 때, $f(a)=f'(a)=0$
이면 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가져야한다.

〈증명〉
$f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)g(x)$
$f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$
$f'(a)=0$이므로 $g(a)=0$
즉, $g(x)=(x-a)h(x)$
따라서 $f(x)=(x-a)^2h(x)$이다.

049

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\geq 2)\end{cases}$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

아래와 같이 전개할 수 있을까?

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}\cdots①$$

$=2f'(2)\cdots②$

①에서 ②가 되려면 $f'(2)$가 존재해야 한다.
즉, "$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하다"는 전제조건이 있어야 한다.

하지만 $f(x)$는

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2,\ \lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이므로 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h},\ \lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

은 순수하게 극한값 계산으로 봐야 한다.

$$\boxed{\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k}$$

i) $\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

$2+3h=t$라 하면
$h\to0+\ \Rightarrow\ t\to2+$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2+3h)=2(2+3h)-4=6h$

$2-h=t$라 하면
$h\to0+\ \Rightarrow\ t\to2-$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2-h)=-(2-h)+2=h$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0+}\frac{6h-h}{2h}=\frac{5}{2}$$

ii) $\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

$2+3h=t$ 라 하면
$h\to0-\ \Rightarrow\ t\to2-$ (합성함수로 생각)
$f(2+3h)=-(2+3h)+2=-3h$

$2-h=t$라 하면
$h\to0-\ \Rightarrow\ t\to2+$이므로 (합성함수로 생각)
$f(2-h)=2(2-h)-4=-2h$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{-3h+2h}{2h}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

$$\Rightarrow\ \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+k$$

따라서 $k=3$이다.

답 3

이번에는 우미분계수와 좌미분계수로 쪼개서 보는 관점에서 풀어보자.

편의상 $f'(2+)$를 $x=2$에서의 우미분계수라 하고,
$f'(2-)$를 $x=2$에서의 좌미분계수라 하자.

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<2) \\ 2x-4 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$f'(2+)=2,\ f'(2-)=-1$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}f'(2+)+\frac{1}{2}f'(2-) \quad =3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Tip

$-h=t$라 하면 $h\to 0+ \Rightarrow t\to 0-$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=\lim_{t\to 0-}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}=f'(2-)$$

마찬가지로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{2h}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0-}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}f'(2-)+\frac{1}{2}f'(2+) \quad =-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}+k$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+k$$

따라서 $k=3$이다.

050

$a>0$인 상수 a

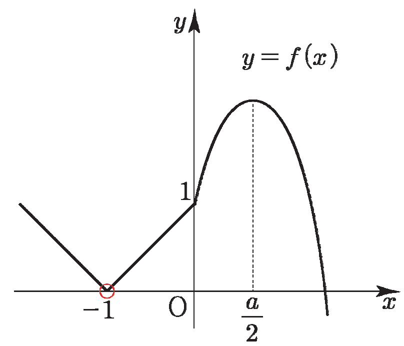
$$f(x)=\begin{cases} |x+1| & (x<0) \\ -x^2+ax+1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$y=-x^2+ax+1=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+1+\frac{a^2}{4}$$

$a>0 \Rightarrow \frac{a}{2}>0$ 이므로 꼭짓점의 x좌표는 양수이다.

이를 바탕으로 $f(x)$의 그래프를 그리면



$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\neq\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

위 조건은 우미분계수와 좌미분계수가 같지 않으므로
$x=k$에서 미분가능하지 않다는 의미이다.

$k=-1$일 때,

$\lim\limits_{x\to -1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$이고

$\lim\limits_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\neq\lim\limits_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$를

만족시키는 실수 k의 개수가 1이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $x=0$에서 연속이므로 미분가능성만 조사하면 된다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x+1-1}{x-0}=1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^2+ax+1-1}{x-0}=a$$

$\Rightarrow a=1$

$f(x)=\begin{cases} |x+1| & (x<0) \\ -x^2+x+1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이므로

$f(-5)f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{5}{4}=5$이다.

답 5

도함수의 활용 | Training – 2 step

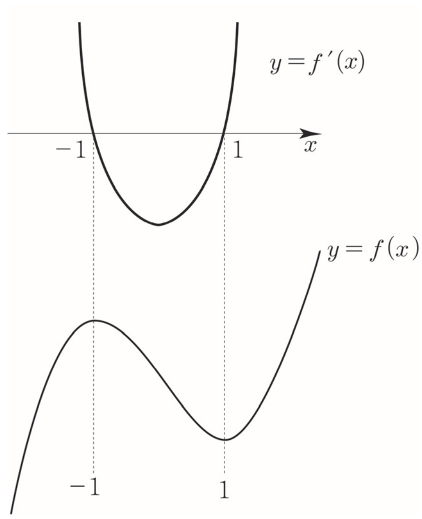
124	⑤	161	④
125	14	162	②
126	③	163	27
127	①	164	④
128	10	165	3
129	13	166	②
130	①	167	①
131	8	168	3
132	①	169	⑤
133	④	170	②
134	7	171	11
135	③	172	21
136	③	173	97
137	①	174	①
138	①	175	③
139	⑤	176	45
140	③	177	⑤
141	12	178	32
142	④	179	①
143	9	180	①
144	⑤	181	③
145	②	182	③
146	22	183	③
147	①	184	③
148	①	185	13
149	②	186	19
150	30	187	16
151	6	188	12
152	①	189	③
153	①	190	③
154	2	191	25
155	②	192	⑤
156	⑤	193	②
157	⑤	194	③
158	①	195	36
159	④	196	⑤
160	②	197	6
198	①	205	③
199	④	206	①
200	③	207	⑤
201	③	208	①
202	21	209	③
203	34	210	③
204	①	211	③

124

$f(x)=x^3-3x+a$

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은

$f(-1)=2+a=7$ 이므로 $a=5$이다.

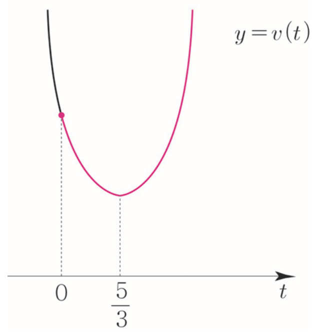
답 ⑤

125

$f(x)=(x-1)^2(x-4)+a$

$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$을 그리면



$t \geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $v(t) \geq 0$가 성립하려면

$v\left(\frac{5}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow -\frac{25}{3}+a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{25}{3}$이므로

조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 9이다.

답 ①

Tip

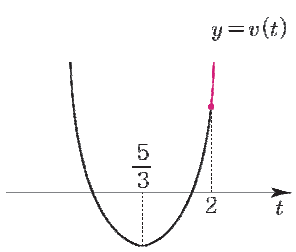
〈범위가 있을 때, 판별식 유의사항〉

아마 판별식 $D \leq 0$이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
이 문제에는 범위가 $t \geq 0$이기 때문에
$t=\frac{5}{3}$를 포함하므로 판별식 $D \leq 0$을 써도 맞지만
만약 범위가 $t \geq 2$라면 판별식을 쓸 수 없다.

도대체 왜 그럴까?

판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고
가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.
즉, 위 문제에서 판별식 $D \leq 0$을 써도 괜찮은 이유는
$t \geq 0$인 경우 정의역이 실수 전체일 때와 마찬가지로
$v(t) \geq 0$가 성립하려면 t축에 접하거나 위로 붕 떠야하기
때문이다.

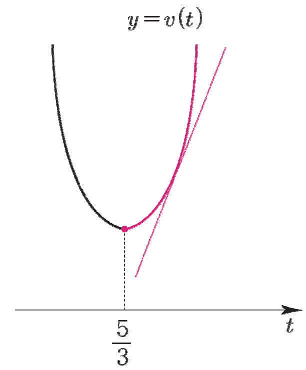
예를 들어 범위를 $t \geq 2$라 해보자.



위와 같은 그림일 때, 판별식을 쓰면 방정식 $v(t)=0$
이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만
실제로는 정의역이 $t \geq 2$이므로 실근을 갖지 않는다.
위에서 배운 내용을 적용시켜보자.

만약 $v(t)$의 정의역이 $t \geq \frac{5}{3}$이고 기울기가 1인
직선 $f(t)$와 접한다고 했을 때,

방정식 $v(t)=f(t) \Rightarrow v(t)-f(t)=0$에서
판별식을 쓸 수 있을까?



정답은 "쓸 수 있다" 이다. $t \geq \frac{5}{3}$이지만 정의역이
실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

〈요약〉

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야하고
   함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.
2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이
   같다면 판별식을 쓸 수 있다.

149

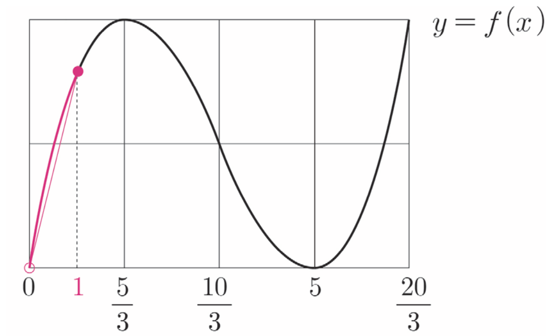
$f(x)=x^3-2$라 하면
$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3-2$

접선이 $(0,\ -4)$를 지나므로
$-4=-2t^3-2 \Rightarrow 2t^3=2 \Rightarrow t=1$

$y=3(x-1)-1 \Rightarrow y=3x-4$이
$(a,\ 0)$을 지나므로 $a=\frac{4}{3}$이다.

답 ②

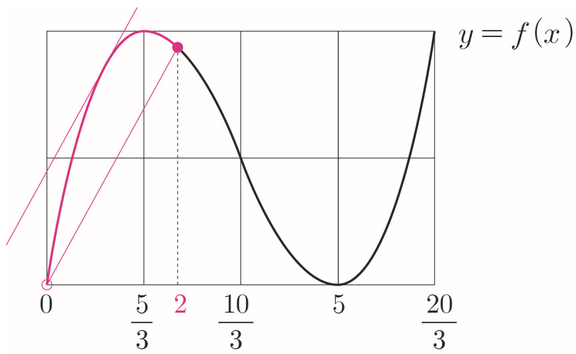


$0 < x \leq 1$에서 방정식 $f'(x) = g(1)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_1) = 1$이다.

(여기서 $f(1)$과 $f\left(\frac{10}{3}\right)$의 대소관계는 중요한 사항이 아니다. 즉, 정확하게 점 $(1,\ f(1))$의 위치를 찾지 않아도 된다.)

$m = 2$이면

$A_2 = \{x \mid f'(x) = g(2),\ 0 < x \leq 2\}$



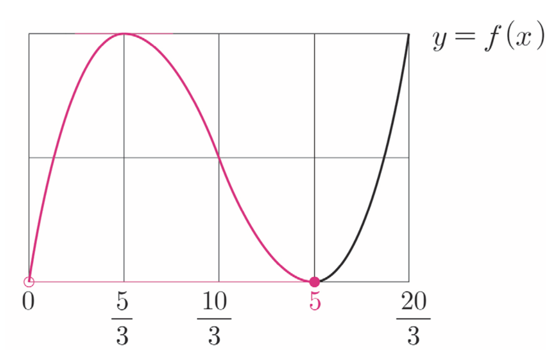
$0 < x \leq 2$에서 방정식 $f'(x) = g(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_2) = 1$이다.

$m = 3,\ m = 4$일 때도 마찬가지 방법으로

$n(A_3) = n(A_4) = 1$이다.

$m = 5$이면

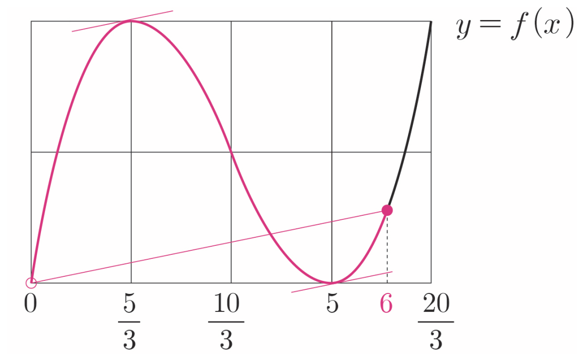
$A_5 = \{x \mid f'(x) = g(5),\ 0 < x \leq 5\}$



$0 < x \leq 5$에서 방정식 $f'(x) = g(5)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_5) = 2$이다.

$m = 6$이면

$A_6 = \{x \mid f'(x) = g(6),\ 0 < x \leq 6\}$



$0 < x \leq 6$에서 방정식 $f'(x) = g(6)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_6) = 2$이다.

$m > 6$이면 그래프를 그렸을 때, $m = 6$과 마찬가지로 방정식 $f'(x) = g(m)$을 만족시키는

$x < \frac{5}{3}$ or $5 < x < m$인 서로 다른 두 실근이 존재한다.

(by 평균값 정리)

여기서 조심해야 할 것은 x의 범위인데 $0 < x \leq m$이므로 실근이 0 이하가 되면 집합에 포함되지 않는다.

즉, 경계(실근이 $x = 0$)일 때의 상황을 조사해봐야 한다.

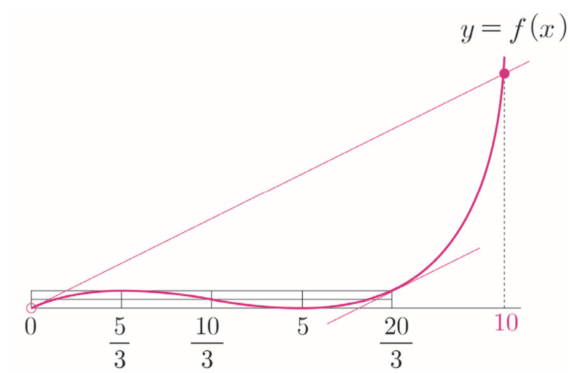
$f'(0) = g(m)$ 임을 만족시키는 m을 구해보자.

$f'(x) = (3x - 5)(x - 5),\ \ g(t) = (t - 5)^2$

$f'(0) = g(m) \Rightarrow 25 = (m - 5)^2 \Rightarrow m = 10\ \ (\because m > 0)$

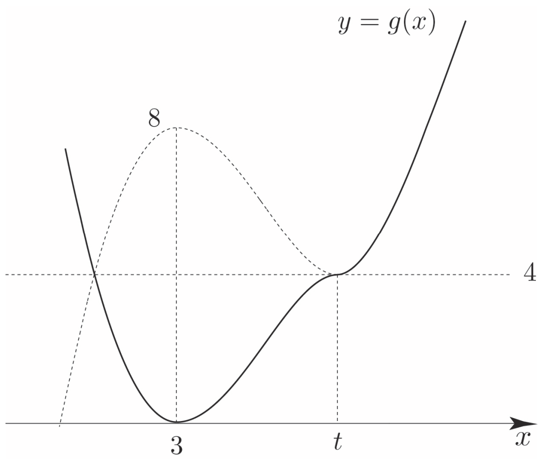
$m = 10$이면

$A_{10} = \{x \mid f'(x) = g(10),\ 0 < x \leq 10\}$



$x = 0$일 때 $f'(0) = g(10)$ 이지만 $0 < x \leq 10$의 범위에 포함되지 않는다.

$0 < x \leq 10$에서 방정식 $f'(x) = g(10)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_{10}) = 1$이다.

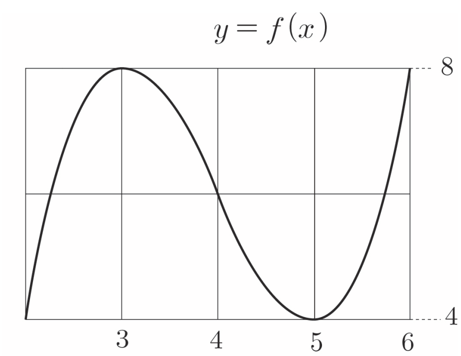


$x=k$에서 극솟값 4를 가질 때,
극값차 공식을 사용하면

$$\frac{|1|}{2}(k-3)^3=8-4 \Rightarrow (k-3)^3=8$$

$$\Rightarrow k=5 \ (\because \ k>3)$$

Box를 그리면 다음과 같다.



$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
식세우기 Technique을 사용하면
$f(x)-8=(x-3)^2(x-6) \Rightarrow f(x)=(x-3)^2(x-6)+8$

따라서 $f(8)=25\times2+8=58$이다.

답 58

253

(가) 조건에 의해
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

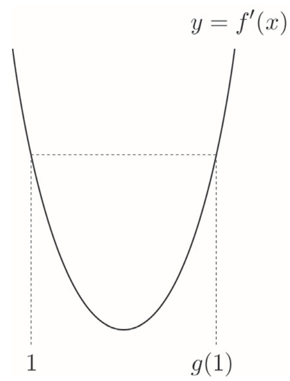
$$\Rightarrow f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ (x\neq1) \ \cdots \ ㉠$$

이때 ㉠의 양변에 $\lim\limits_{x\to1}$ 을 걸면

$$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

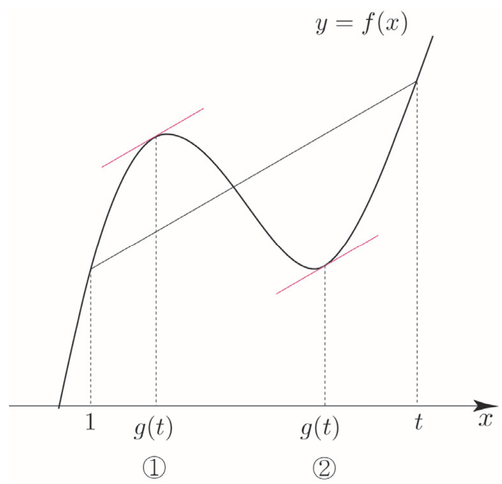
$$\Rightarrow f'(g(1))=f'(1) \ \cdots \ ★$$

(나) 조건에 의해 $g(1)\geq\frac{5}{2}$이므로 다음 그림과 같다.

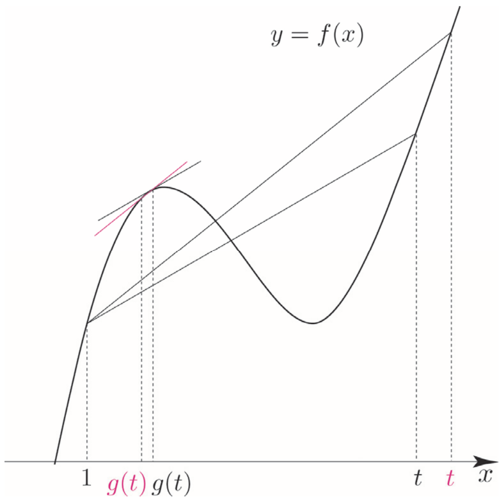


$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$는 두 점 $(x, f(x))$, $(1, f(1))$를
지나는 직선의 기울기로 해석할 수 있다.
이를 활용해서 문제를 풀어보자.

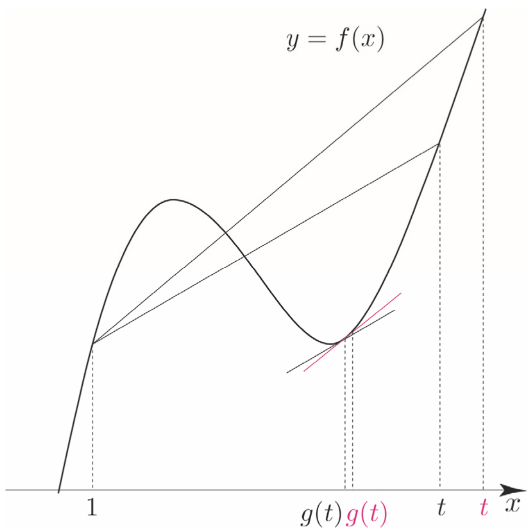
우선 감을 찾기 위해서 함수 $f(x)$가 다음과 같을 때,
㉠을 해석해보자.



위 그림과 같이 만약 $x=t$일 때,
$f'(g(t))=\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$를 만족시키는 $g(t)$는
①, ②이 가능하다. 만약 ①이라고 가정해보자.
(참고로 $g(x)$는 실수의 전체의 집합에서 연속인 함수이므로
①과 ②를 넘나들 수 없다.)

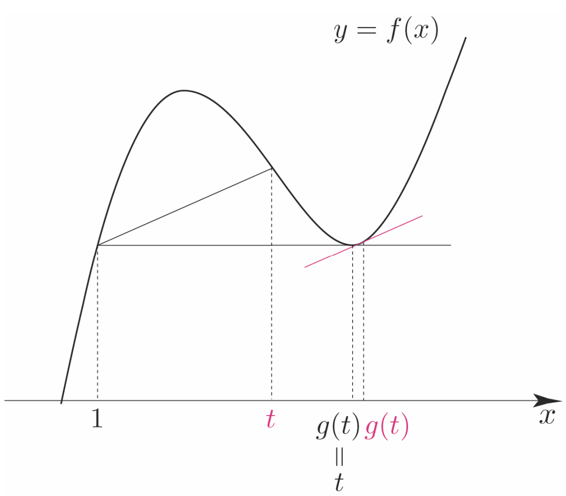


위 그림과 같이 ①의 경우 t값이 한없이 커지면 $g(t)$가 한없이 작아짐을 알 수 있다. 이렇게 되면 함수 $g(x)$의 최솟값이 존재하지 않으므로 모순이다.
즉, $g(t)$는 ② 이어야 한다.



마찬가지로 ②의 경우 t값이 한없이 커지면 $g(t)$가 한없이 커짐을 알 수 있고 최솟값이 존재할 수 있다.

이번에는 $g(t)=t$인 특수한 상황일 때를 살펴보자.



위 그림과 같이 t값이 작아지면 $g(t)$가 다시 커짐을 알 수 있다. 즉, (나) 조건에 의해 $(1,\ f(1))$에서 그은 접선의 접점은 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$이다.

접선의 방정식을 $y=ax+b$라 하고,
식세우기 Technique을 사용하면

$$f(x)-(ax+b) = (x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$$

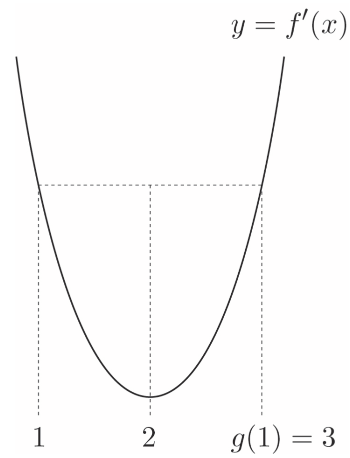
$$\Rightarrow f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+ax+b$$

(다) 조건에서 $f(0) = -3 \Rightarrow b=\frac{13}{4}$이므로

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+ax+\frac{13}{4} \quad \cdots \quad ㉡$$

$$f'(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)+a=3x^2-12x+\frac{45}{4}+a$$

$f'(x)$는 $x=2$에 대하여 대칭이므로 ★에서 $g(1)=3$이다.



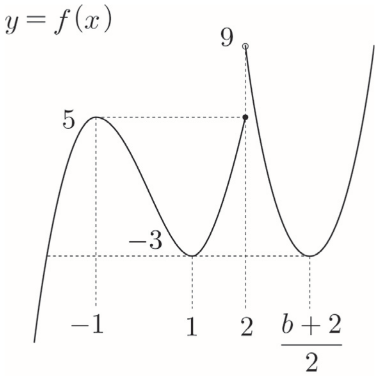
$f(g(1))=6 \Rightarrow f(3)=6$이므로 ㉡에 $x=3$를 대입하면

$$6=(3-1)\left(3-\frac{5}{2}\right)^2+3a+\frac{13}{4} \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$이다.

따라서 $f(4)=3\times\frac{9}{4}+3+\frac{13}{4}=13$이다.

답 13

iii) $f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim_{t\to k-}g(k)$, $\lim_{t\to k+}g(k)$를 구하면

	$g(k)$	$\lim_{t\to k-}g(k)$	$\lim_{t\to k+}g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$를 만족시키는 실수 k의 값은 오직 $k=-3$뿐이므로 조건을 만족시킨다.

$b>2$, $f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$ 이므로

$f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3 \Rightarrow a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)+9=-3$

$\Rightarrow a\left(\frac{b-2}{2}\right)\left(\frac{-b+2}{2}\right)=-12 \Rightarrow a(b-2)^2=48$

a는 자연수이고, b는 2보다 큰 자연수이므로
$a(b-2)^2=48$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$이다.
따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

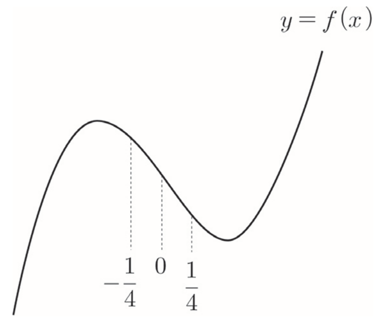
답 ①

257

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$

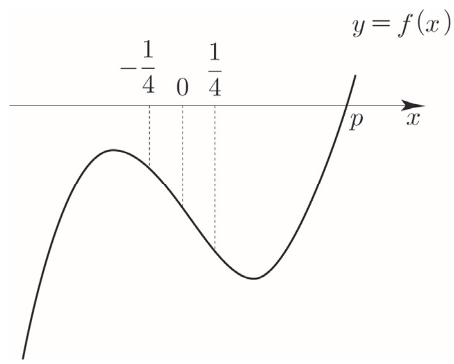
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$이고 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 양수이므로
방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 근으로 가진다.
즉, $f(x)$는 극대, 극소를 모두 가지는 개형이다.

또한 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 $f'(0)<0$이다.
이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 존재하지 않는다고 했으니 함숫값의 부호가 중요하므로
x축의 위치에 따라 case분류하면서 감을 찾아보자.
(이때 k와 관계없이 $k-1$과 $k+1$의 차이가 항상 2인 것에 집중하여 판단해보자.)

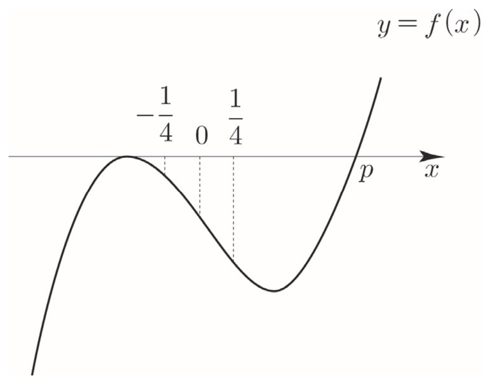
① 방정식 $f(x)=0$이 하나의 실근을 갖는 경우
이때 $f(x)=0$의 실근을 $p\,(p>0)$라 하자.



$0<p\le 1$이면 $k=1$일 때, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.
$1<p<3$이면 $k=2$일 때, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.
$p\ge 3$이면 $k-1<p<k+1$인 정수 k가 반드시 존재하고 $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.

$p<0$일 때도 $p>0$와 구조가 같으므로 모순이다.

② 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우
이때 $f(x)=0$의 중근이 아닌 실근을 $p\,(p>0)$라 하자.

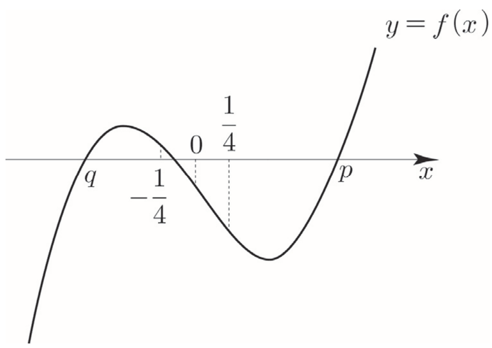


①과 같은 논리로 $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 존재하므로 모순이다.

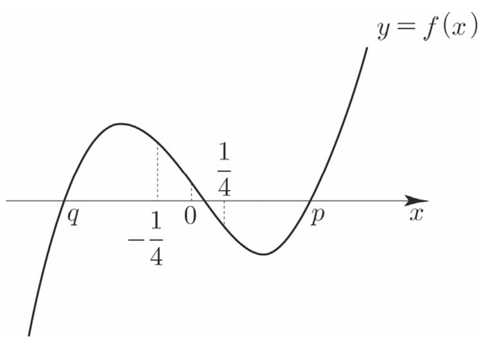
$p<0$일 때도 $p>0$와 구조가 같으므로 모순이다.

③ 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우
이때 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근 중 가장 작은 실근을 q, 가장 큰 실근을 p라 하자.

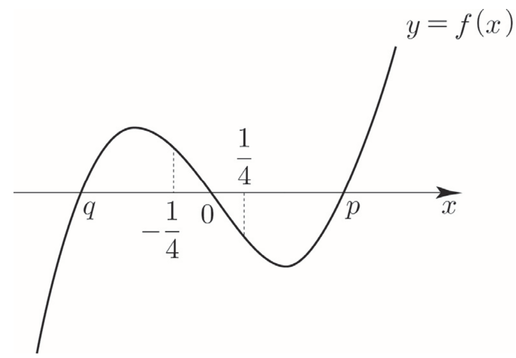
만약 $f(0)<0$라 하면 ①과 같은 논리로
$k-1<p<k+1$이고, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 존재하므로 모순이다.



만약 $f(0)>0$라 하면 ①과 같은 논리로
$k-1<q<k+1$이고, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 존재하므로 모순이다.



즉, $f(0)=0$이어야 한다.



$p>1$이면 $k-1<p<k+1$이고, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 반드시 존재하므로 모순이다.

$q<-1$이면 $k-1<q<k+1$이고, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 반드시 존재하므로 모순이다.

즉, $0<p\le 1,\ -1\le q<0$이어야 한다.

$f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 존재하지 않으려면 아래와 같은 case가 가능하다.
(만약 $0<p<1,\ -1<q<0$이면 $k=0$일 때, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.)

i) $q=-1,\ p=1$
$f(x)=x(x+1)(x-1)=x^3-x$
$f'(x)=3x^2-1$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)\ne-\frac{1}{4}$이므로 모순이다.

ii) $q=-1,\ 0<p<1$
$f(x)=x(x+1)(x-p)=x^3+(1-p)x^2-px$
$f'(x)=3x^2+2(1-p)x-p$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}\Rightarrow-\frac{p}{2}-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow p=-\frac{1}{8}$
$0<p<1$를 만족시키지 않으므로 모순이다.

iii) $-1<q<0,\ p=1$
$f(x)=x(x-1)(x-q)=x^3-(q+1)x^2+qx$
$f'(x)=3x^2-2(q+1)x+q$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{11}{16}+\frac{3}{2}q=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow-\frac{3}{2}q=\frac{15}{16}\Rightarrow q=-\frac{5}{8}$
$-1<q<0$을 만족시킨다.
즉, $f(x)=x(x-1)\left(x+\frac{5}{8}\right)$

015

$f(x) = -x^2+2x+8$

$f'(x) = -2x+2$

$g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int (x+1)f(x)\,dx + \int \left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx$

$\quad = (x+1)f(x)+f(x)+C$

$g'(x) = f(x)+(x+1)f'(x)+f'(x)$

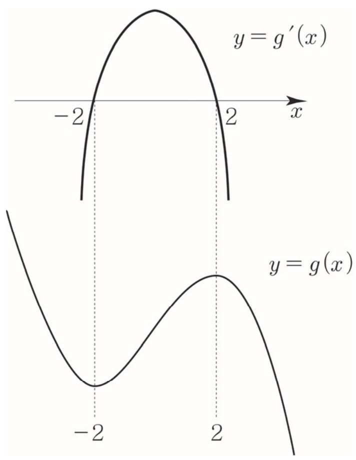
$\quad = -x^2+2x+8+(x+1)(-2x+2)-2x+2$

$\quad = -x^2+2x+8-2x^2+2-2x+2$

$\quad = -3x^2+12 = -3(x^2-4)$

$\quad = -3(x-2)(x+2)$

$g'(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면



$g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$g(-2)=1 \Rightarrow -f(-2)+f(-2)+C=1 \Rightarrow C=1$

$g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$g(2)=3f(2)+f(2)+1=4f(2)+1=32+1=33$이다.

답 33

016

$\displaystyle\int f(x)\,dx+2x^3 = xf(x)$

양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)+6x^2=f(x)+xf'(x) \Rightarrow f'(x)=6x$

$f(x)=3x^2+C$

$f(0)=2 \Rightarrow C=2$

$f(x)=3x^2+2$이므로 $f(5)=77$이다.

답 77

017

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\displaystyle\int xf(x)\,dx+f(x)=x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+x$

양변을 x에 대해 미분하면

$xf(x)+f'(x)=4x^3+x^2+7x+1$

$f(x)=ax^n+\cdots$라 하면 좌변의 최고차항은 ax^{n+1}이므로

$a=4,\ n=2$이다.

$f(x)=4x^2+bx+c$

$f'(x)=8x+b$

를 좌변에 대입하면

$xf(x)+f'(x)=4x^3+x^2+7x+1$

$4x^3+bx^2+(8+c)x+b=4x^3+x^2+7x+1$

$b=1,\ c=-1$

$f(x)=4x^2+x-1$이므로 $f(1)=4$이다.

답 4

018

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\displaystyle\int (x-1)f'(x)\,dx=(x-1)^3(x-3)$

양변을 x에 대해 미분하면

$(x-1)f'(x)=3(x-1)^2(x-3)+(x-1)^3$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)+(x-1)^2$

$\quad =4x^2-14x+10$

$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-7x^2+10x+C$

$f(0)=0 \Rightarrow C=0$

$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-7x^2+10x$이므로

$f(3)=36-63+30=3$이다.

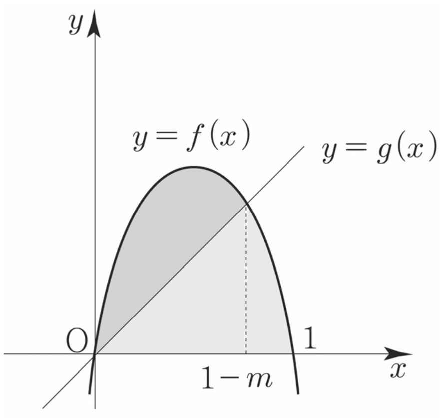
답 3

025

$f(x) = -x^2+x = -x(x-1)$, $g(x)=mx$

$-x^2+x=mx \Rightarrow x(x+m-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ or $x=1-m$



$\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^{1-m}\{f(x)-g(x)\}dx$

$\frac{1}{6}(1-0)^3 = 2\times\frac{1}{6}(1-m-0)^3$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}(1-m)^3$

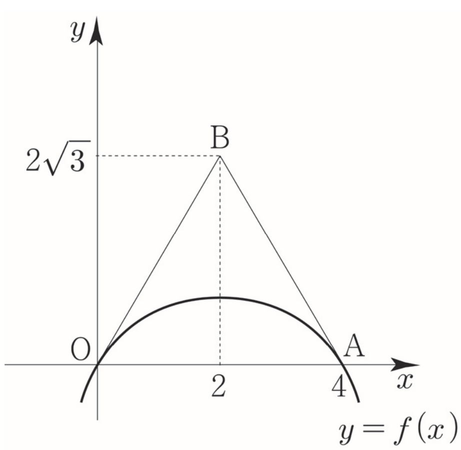
$\frac{1}{2}=(1-m)^3$

따라서 $4(1-m)^3=2$이다.

답 2

026

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 2\sqrt{3})$
삼각형 OAB의 넓이가 두 점 O, A를 지나는
이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여 이등분된다.
($f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.)



삼각형 OAB(정삼각형)의 넓이 S는

$\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$f(x)=ax(x-4)$ $(a<0)$

$\int_0^4 f(x)dx = \frac{|a|}{6}(4-0)^3 = \frac{32|a|}{3} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow a = -\frac{3}{16}\sqrt{3}$

$f(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}\,x(x-4)$이므로

$64f(1)f(2)=81$이다.

답 81

Tip

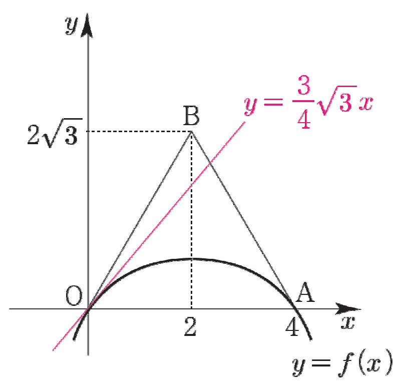
〈접선의 기울기를 이용한 위치관계 판단〉

Q. 곡선 $y=f(x)$와 직선 OB는 $0<x<2$에서 교점이 존재할까?

물론 직선 OB는 $y=\sqrt{3}\,x$이므로
방정식 $f(x)=\sqrt{3}x$을 풀어서 확인할 수도 있지만
$x=0$에서의 접선의 기울기를 이용하면 된다.

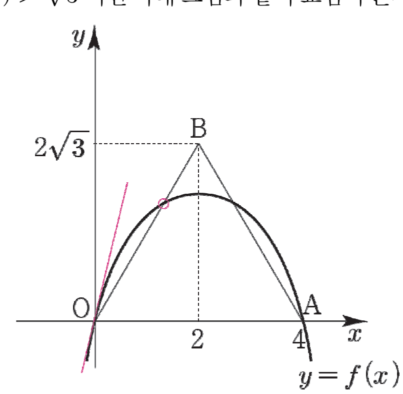
$f'(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}\,(2x-4)$이므로

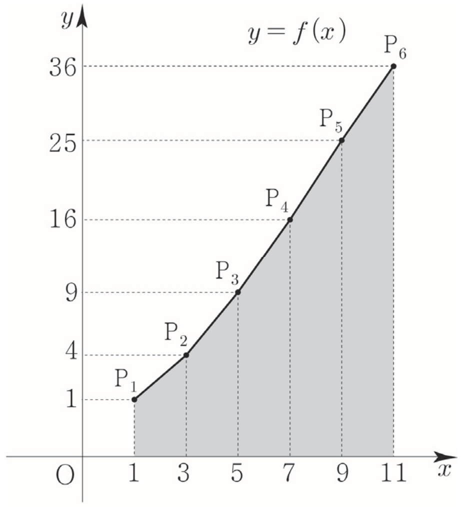
$f'(0)=\frac{3}{4}\sqrt{3} < \sqrt{3}$이다.



따라서 $0<x<2$에서 교점이 생기지 않는다.

만약 $f'(0) > \sqrt{3}$이면 아래 그림과 같이 교점이 존재한다.





$\int_1^{11} f(x)dx$의 값은 사다리꼴의 넓이의 합과 같다.

$$\int_1^{11} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times(1+4)+\frac{1}{2}\times2\times(4+9)+\frac{1}{2}\times2\times(9+16)$$
$$+\frac{1}{2}\times2\times(16+25)+\frac{1}{2}\times2\times(25+36)$$
$$=5+13+25+41+61=145$$

답 ②

Tip

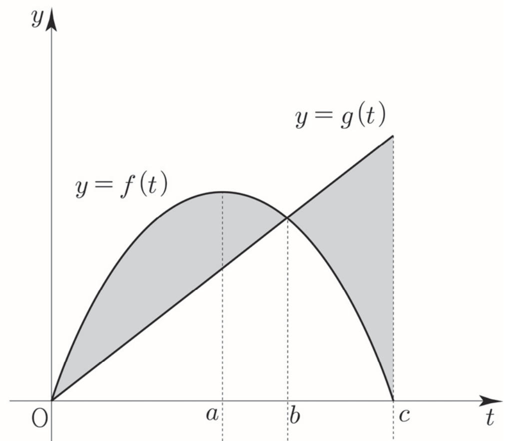
P_n의 y좌표를 b_n으로 두고 P_n의 좌표만 구했다면 어렵지 않게 풀 수 있었다.
이 문제를 풀지 못했던 학생들의 대부분은 아마 비주얼에 압도당했을 가능성이 크다.
절대 쫄지 말자!!! 그냥 한 번 해본다는 마인드는 문제를 풀기 위한 아주 강력한 Tool이다.

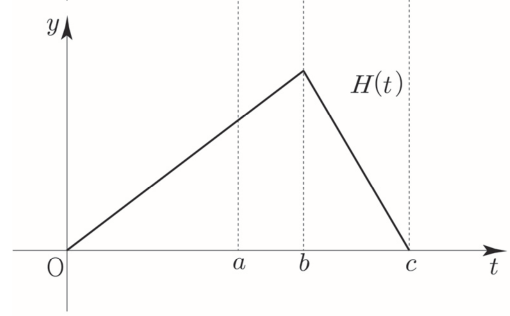
086

물체 A의 높이를 $F(t)$, 물체 B의 높이를 $G(t)$라 하면
물체 A의 높이와 물체 B의 높이의 차는
$|F(t)-G(t)|$이다.
$H(t)=F(t)-G(t)$라 하면
같은 높이의 지면에서 동시에 출발했으므로
$F(0)=G(0) \Rightarrow H(0)=0$

$$\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$$

$h(t)=f(t)-g(t)$를 바탕으로 $H(t)$를 그리면
(빼기함수 Technique !)





ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
$H(a)=F(a)-G(a)>0$이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
$|H(t)|=H(t)$는 $t=b$일 때, 최대이므로
ㄴ은 참이다.

ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.
$t=c$일 때, $H(c)=F(c)-G(c)=0$이므로
물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.
따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

087

$v_1(t)=t^2-6t+5,\ v_2(t)=2t-7$이고
$x_1(0)=x_2(0)=0$이므로
$x_1(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t,\ x_2(t)=t^2-7t$

$$f(t)=\left|\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t-(t^2-7t)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$$
$$=\left|\frac{1}{3}t(t-6)^2\right|$$