대한민국 0.1% 학생들의 공부법 <1편>

안녕하세요, 수험생 여러분. TEAM 수리남입니다.

개인적으로 의치대 재학생으로서 가장 많이 듣게 되는 말 중 하나는 역시

"

어떻게 공부해야 의치대에 갈 수 있나요?

"

입니다.

그 중에서도 저희는 수학 컨텐츠팀으로서 **수학 공부법**에 대해 이야기해볼까 합니다.

수학 공부법 관련해서는, 모든 사람들의 공부 스타일에 개인차가 있고 정말 다양한 글들이 보이지만, 사실 굉장히 포괄적이고 의미가 모호한 조언들이 많습니다.
특히 오답노트, 복습 등의 이야기는 사실 ***그 자체를 하고 있느냐가 중요한 것이 아니라***, 얼마나 ***능동적으로 생각의 근육을 쓰고 있는지***가 중요하기 때문에 5-6등급 학생부터 1-2등급 학생들까지 모두 오답노트를 쓰고 있음에도 **그 효과는 천지 차이**가 될 수밖에 없습니다.

공부법에 정답을 논하긴 힘들지만, 적어도 **꾸준히 우수한 성과를 낸 이들이 모두 하고 있는 방법론**은 누구나 살펴볼 가치가 충분히 있겠죠. 저희 의치대 동기들과 이야기를 나누거나 메디컬에 합격하는 저희 학생들의 수학 공부법을 6~7년 간 꾸준히 살펴볼 때 이들이 모두 거쳐가는 **공통적 공부법들**이 있습니다.

오늘은 이 중 한 가지인 **유형분류 공부법**을 A to Z로,
그 의미부터 본질을 가장 잘 살려서 만든 한 가지 구체적 매뉴얼까지 다루어보고자 합니다.

자신만의 공부 스타일이 확실하게 확립된 학생들도 오늘 칼럼에서 취할 부분을 취하고,
무엇보다 ***공부법에 혼란이 오고 확신이 서지 않는 학생***이라면 오늘 마지막 챕터에 제시하는 **구체적인 공부법 매뉴얼을 프로토콜로 삼아 실제로 적용해보기**를 강력히 권장드립니다.

유형 분류의 의미

진정한 의미의 유형 분류는 어떤 것을 말할까요?

본인이 틀린 문제가 수학2의 <함수의 극한>에서 나온 문제라는 것을 인지하고, 문제집에서 <함수의 극한> 단원의 문제를 많이 푸는 것이, 유형 분류를 하여 본인이 취약한 유형을 학습하는 것일까요?

이것은 단원 분류이지, 유형 분류가 아닙니다.

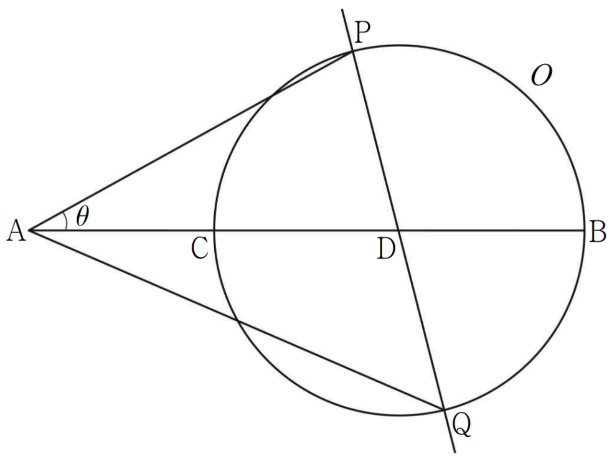
유형 분류란, 다양한 수학 실전 개념들과 문제들 간에 **공통적 메커니즘을 발견**하고, 이를 **공유하는 문제들을 범주화**하여 이에 대한 **일반적인 풀이 알고리즘을 만드는 것**입니다.
쉽게 말해, **같은 핵심 공식 / 아이디어에 의해 풀리는 문제들**을 묶어서 ***'이런 문제들은 이렇게 하면 다 풀린다'***라는 **원칙**을 세우는 것입니다.

이 과정의 가장 첫 번째 시작점은 **같은 핵심 공식 / 아이디어를 쓰는 문제들**을 **한 곳에 모아보는 것**입니다.

직관적 이해를 위해 2024년 5월 모의고사의 29번 문항을 예시로 살펴보겠습니다.

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0 = \frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0) = k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD} < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$이다.)

[4점]

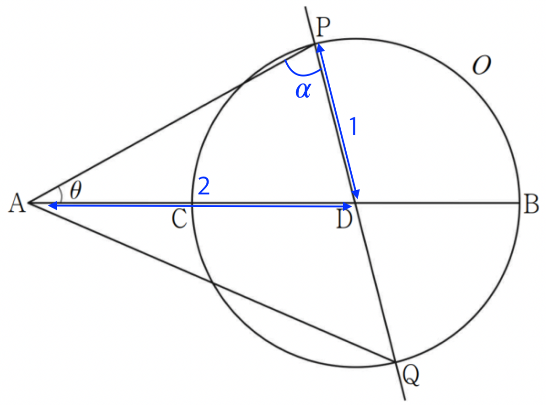


[2024년 5월 모의고사 29번]

**이 문제의 상세 풀이는 칼럼 마지막 페이지에 기술해두었습니다.*

핵심 풀이 아이디어만 함께 살펴봅시다.
이 문제의 난점은, 구하는 $f(\theta)$ 라는 녀석이 θ에 대한 식으로 완벽하게 떨어지지 않으면서 구하는 값인 $f'(\theta)$ 를 계산하기 곤란하다는 점이었습니다.

이 난점의 해결은 **α라는 새로운 각을 도입하고 사인 법칙에 의해 $\sin\alpha = 2\sin\theta$라는 관계식을 얻어내는 것**입니다.



α를 도입해도 θ와의 관계식만 있으면 새로운 변수를 추가한 것이 아니라, **θ와의 관련성을 갖고 움직이는 θ에 대한 함수로 볼 수 있게 됩니다**. $f(\theta)$ 의 식에 α가 포함되어 이를 미분해야하는 상황에서도, 음함수의 미분을 이용해 그대로 미분계수나 함숫값을 구해낼 수 있게 되므로 α를 도입해도 θ와의 관계식만 있다면 계산에 아무런 문제가 없는 것이죠.

결국 우리는 이런 문제에 대해 아래와 같은 풀이 계획을 세울 수 있습니다:

기존의 변수만으로 문제 해결이 안될 때는,
새로운 변수를 도입하고, 새로운 변수와 기존의 변수와의 관계식을 도출하자.

과연 이를 적용해 문제를 풀어나가면,

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{QD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{QD} \times \cos(\theta + \alpha)$$

$$\rightarrow \overline{AQ} = f(\theta) = \sqrt{5 - 4\cos(\theta + \alpha)}$$

양변을 θ에 대해 미분하면, $f'(\theta) = \dfrac{2\sin(\theta+\alpha) \times \left(1 + \dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)}{\sqrt{5 - 4\cos(\theta+\alpha)}}$

$\dfrac{d\alpha}{d\theta}$는 $\sin\alpha = 2\sin\theta$ 의 관계식이 있기 때문에 쉽게 구할 수 있습니다.

정해진 θ_0라는 값과 그 때의 α에 대하여, 대입만 해주면 답이 나오겠죠.

이 때 중요한 부분은, 이와 같이 하나의 문제풀이 계획으로 **문제를 풀어냈을 때**, **그것이 다른 기출문제에도 적용되어 하나의 원칙으로 기능을 할 수 있는지**를 생각하는 것입니다.
우리가 방금 떠올렸던 문제 풀이 계획,

기존의 변수만으로 문제 해결이 안될 때는,
새로운 변수를 도입하고, 새로운 변수와 기존의 변수와의 관계식을 도출하자.

위 풀이 도식이 ***이번 문제 하나에만 적용되는 특수한 아이디어***라고 생각하면 ***오산***입니다.
수능 수학은 존재 이래 동일한 문제 유형을 끊임없이 반복 출제해왔고, **같은 사고 방식이 적용되는 문제들이 그저 다른 탈을 쓰고 똑같이 계속해서 등장**합니다.
이런 **유형들을 범주화**하고, **하나의 원칙**을 만들어 이런 유형의 문제가 다시 출제되었을 때 완벽히 대응하기 위해서 우리는 끊임없이 기출문제를 반복 학습하고, 거기서 그치지 않고 **유형 분류**를 해야만 하는 것입니다.
왜 상위권 학생들이 모두 이 방법을 사용하고 있는지 이해가 되겠죠?

여기쯤에서, 이런 식으로 풀었던 기출 문제가 떠오르지는 않나요?

곧바로 2018년도 수능의 21번 문항을 한 번 다루어보겠습니다.

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t + \ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

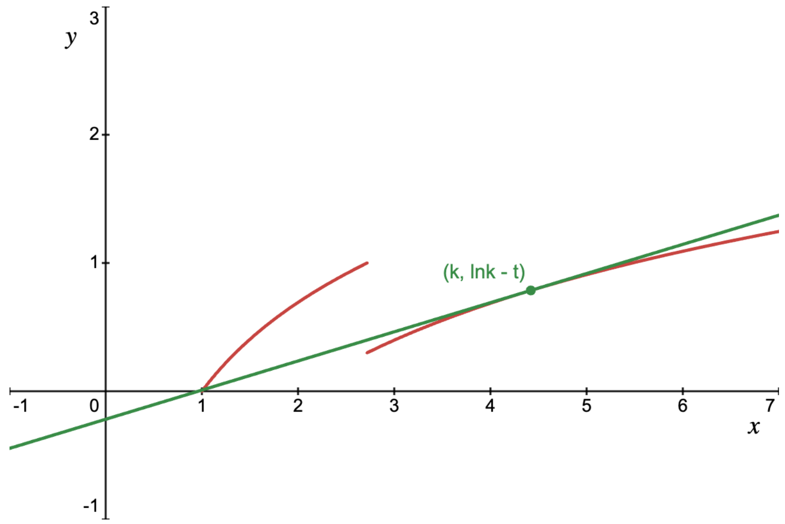
미분 가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a) = \dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.

$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

[2018학년도 수능 21번]

이 문제의 상세 풀이는 칼럼 마지막 페이지에 기술해두었습니다. 문제를 아직 풀어보지 않았다면 문제를 위에서 다룬 원칙에 비추어 풀어본 후 뒷페이지의 해설을 참조하기 바랍니다.
이미 문제를 풀어보았다면 아래 해제를 계속 따라오시기 바랍니다.

문제풀이의 핵심은, t라는 변수만으로 다루기 힘든 접점의 x 좌표를 k로 두는 아이디어였습니다.



여기서 k를 도입하는 근거로서, 우리는 **이전 기출문제를 풀면서 이끌어냈던 문제풀이 원칙을 떠올릴 수 있습니다.**

기존의 변수만으로 문제 해결이 안될 때는,
새로운 변수를 도입하고, 새로운 변수와 기존의 변수와의 관계식을 도출하자.

이와 같이 k를 도입하면, $\dfrac{\ln k - t}{k-1} = \dfrac{1}{k}$라는 관계식으로 함께 묶을 수 있습니다.

따라서 $h(t) = \dfrac{1}{k}$로 표현할 때 문제에서 구하려는 $h'(\dfrac{1}{2e}) \times h'(a)$도 어렵지 않게 구할 수 있을 것이라는 계획 하에 움직일 수 있는 것입니다.

음함수 미분법에 의해 $\dfrac{dk}{dt} = \dfrac{k^2}{k-1}$를 얻을 수 있고,

$h'(t) = -\dfrac{1}{k^2}\dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{1}{k^2}\dfrac{k^2}{k-1} = \dfrac{1}{1-k}$ 로부터 우리가 원하는 값에 대한 관계식들을 대입해 답을 얻어낼 수 있는 것이죠.

이처럼,
하나의 기출문제에서 사용한 문제풀이 도식이 **다른 여러 기출 문제들에서도 똑같이 적용된다면** 우리는 이것을 하나의 일반적인 원칙으로 부를 수 있습니다.
원칙이란 다음에 **이와 같은 유형의 어떤 문제가 나와도 대응할 수 있다**는 점에서 정말 큰 힘을 가집니다.

그동안 기출문제를 풀면서 이런 생각이나 행동을 취하지 않았다면, 다음 번 시험에 새롭게 나온 문제들 앞에서는 힘을 쓰지 못합니다. 끊임없이 기출문제 풀이 경험을 축적하고, 여러 문제들 사이에서 원칙을 도출해 정리해두어야 하는 이유가 여기에 있습니다.

┃유형 분류 공부법 - 어떻게 할지 막막하면 이것만 따라해보세요

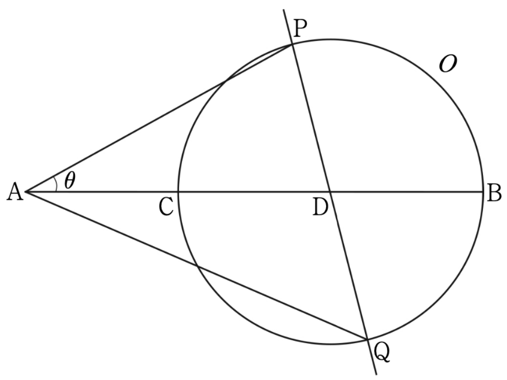
매달 올라가는 저희 팀의 **<모의고사 완벽 분석서>**에도 실려 있는 내용인데, 철저한 기출 정리의 핵심은 **문제 상황별 접근 태도 및 실전개념 정리**를 하는 것입니다.

도형 문제가 나왔을 때, $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한을 마주했을 때, 함수의 그래프가 곧바로 그려지지 않을 때 등 구체적인 상황별로 **어떤 행동을 취해야 하는지**, 또 이 문제는 어떠한 **실전개념**을 알아야 풀 수 있는지를 명확하게 정립해두며, 이를 차곡차곡 쌓아나가야 합니다.

이것을 성공적으로 해내기 위한 방법론으로 **유형 분류**가 기본적으로 뒷받침되어야 하는 것이고, 공부할 때 **유형 분류**를 어떻게 적용해야 하는지, '*Application Note*' 라는 시스템을 통해 자세하게 설명해보겠습니다.

STEP 1. 어려웠던 문항과, 이 문항에서의 실전개념 및 접근 태도를 정리한다.

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0=\frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0)=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD}<\frac{\pi}{2}$이고 $0<\theta_0<\frac{\pi}{6}$이다.) [4점]



[실전개념 및 태도 정리]

① 기존의 변수만으로 문제 해결이 안될 때는, 새로운 변수를 도입하고, 새로운 변수와 기존의 변수와의 관계식을 도출하자.

② 중점들이 보이면, 중선정리를 활용해 볼 수도 있다.

문제를 풀다가, 태도 정리가 확립되어 있지 않거나 실전개념 정리의 부족 등으로 **문제를 풀지 못 한 경우**, 노트의 왼쪽 면에 1) 해당 문제와 2) 그 문제를 풀어내는데 있어 가장 핵심적인 **접근 태도** 및 **실전개념**을 정리합니다.

STEP 2. 채워진 왼쪽 면을 하루에 한 번씩 정독해서 읽으며, 실전개념과 접근 태도를 머릿속에 정립한다.

하루에 30분~1시간 정도 지금까지 여러 문항으로 채워놓은 왼쪽 면을 읽으면서, 상황별로 문제를 대하는 태도와 실전개념들을 공부하시면 됩니다.

[실전개념 및 태도 정리] 부분을 가리고, 실제로 문제를 처음 봤다고 생각하면서 해당 내용을 떠올리는 연습을 하는 것이 크게 도움이 되기도 합니다. 또 문제의 풀이 방향을 머릿속으로 떠올려보고, 확실한 방향성이 떠오르지 않는 문항들은 다시 한 번 풀어보는 시간을 가지세요.

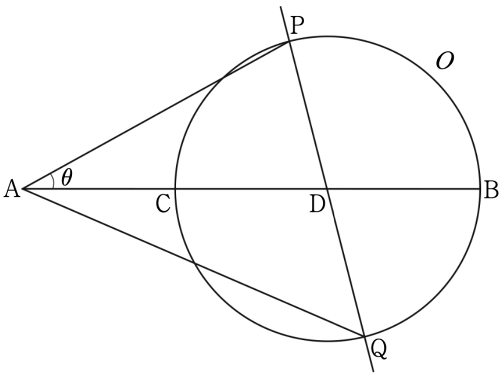
STEP 3. 다른 기출, 사설 문항들을 풀면서 Application Note의 내용을 떠올리고, 적용하는 연습을 한다.

Application Note를 작성하고 공부하는 것 이외에도 새로운 문제를 계속 풀게 될텐데 이때 **STEP1~2**에서 공부한 내용을 떠올리면서 문제에 적용하는 연습을 하세요.

다른 문항에서 Application Note의 내용을 직접 적용하는데 성공했다면, 해당 **실전개념**과 **접근 태도**는 **확실히 자신의 것이 될 것입니다.**

STEP 4. STEP 3에서 Application Note에 정리했던 내용이 적용되는 다른 문제를 발견했다면, 오른쪽 빈 페이지에 해당 문항을 옮겨 적는다.

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle\mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0=\frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0)=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{APD}<\frac{\pi}{2}$이고 $0<\theta_0<\frac{\pi}{6}$이다.) [4점]



[실전개념 및 태도 정리] △○

① 기존의 변수만으로 문제 해결이 안될 때는, 새로운 변수를 도입하고, 새로운 변수와 기존의 변수와의 관계식을 도출하자.

② 중점들이 보이면, 중선정리를 활용해 볼 수도 있다.

[유사문항 1]

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1\le x<e)\\ -t+\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\}\ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\frac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{(e+1)^2}$　② $\frac{1}{e(e+1)}$　③ $\frac{1}{e^2}$
④ $\frac{1}{(e-1)(e+1)}$　⑤ $\frac{1}{e(e-1)}$

[유사 문항 2] ~

예를 들면, 5월 학평 미적 29번을 틀려서 왼쪽 페이지에 정리했다고 생각해봅시다.

기출 문제를 풀다가 18학년도 수능 수학(가형) 21번 문항을 풀게 된다면, Application Note의 해당 내용이 떠올랐을 것입니다.

만약에 18학년도 수능 21번의 해설을 보기 전까지 Application Note의 해당 내용이 떠오르지 않았다면 [실전개념 및 태도 정리] 옆에 △ **표시**를 해놓으세요. 그리고 Application Note를 공부할 때, 세모 표시가 있는 부분은 확실하게 복습하고, 기존 문항과 유사 문항까지 싹 다 한 번씩은 풀어보는 것입니다.

그리고 다음 유사 문항이 나왔을 때 해당 내용을 적용하는데 성공했다면, [유사문항 2]를 옮겨적는 동시에 [실전개념 및 태도 정리] 옆에 ○ **표시**를 해두세요. 다음 번에 동그라미 표시가 있는 내용은 조금 더 가볍게 복습하고 넘어가면 됩니다.

유형 분류를 통해 **문제별/상황별 접근 태도 및 실전개념**을 구축하는 구체적 방식에는 개인차가 조금씩 존재하더라도, 위 *Application Note* 작성과 같이 본인만의 구체적인 방법론은 **꼭 가지고 있어야 합니다.**

이 방법론으로 저희 팀원들도 수험생 시절, 모의고사 일등급을 넘어 꾸준한 만점을 유지할 수 있었고, 2~5등급의 과외 학생들의 **1등급 달성에도 큰 요인**으로 작용했습니다.

다소 귀찮아 보일 수 있지만, **'개념과 문제와의 유기적 연결'**, **'문제와 문제와의 유기적 연결'**을 연습하는 동시에 **실전개념 및 접근 태도** 정립, **문항 복습**까지 한 번에 할 수 있는 가장 **확실하고 효율적인 방법**입니다.

TAKE HOME MESSAGE

본인이 풀지 못했거나, 어렵다고 생각한 문제는 풀이만 보고 *'이렇게 푸는 것이군'*하고 넘겨서는 ***절대 안됩니다.***

풀이를 세심하게 하나하나 뜯어보면, **다양한 포인트**가 녹아 있고, **정확히 어느 지점에서** 본인이 막혔는지 알아낼 수 있어야 합니다.

그리고 **그 포인트가 똑같은 문제들**을 자기만의 방식으로 한 군데에 모아 **비교/대조**해보고, 앞으로 그러한 **같은 포인트에서 출제된 문제들에 대해서는 완벽한 자신감으로 풀어낼 수 있어야 합니다.**

그렇게 해야 본인의 **수학 실력이 실질적으로 좋아지는 것**이고, **등급 향상**이라는 목표를 이뤄낼 수 있습니다.

이렇게 핵심 포인트를 찾고, 문제를 분석해내는 과정이 익숙하지 않은 학생이라면, 과외 선생님이나 다른 사람의 도움을 받아도 좋습니다.

하지만 꼭, 본인이 틀린 문제나 어렵게 느꼈던 문제들에 대해서는
체계적 유형 분류를 통해 본인의 것으로 만드십시오.

다음 편에서는 **<실수를 체계적으로 다루는 프로토콜을 정립하는 것>**과 관련한 칼럼으로 찾아뵙겠습니다.

지금까지 **TEAM 수리남**이었습니다.
이 글을 읽는 수험생 여러분 모두에게 행운을 바랍니다.

*[2024년 5월 모의고사 29번] 해제

더욱 상세한 해설은 TEAM 수리남 작성 글 중 ‘5월 모의고사 주요문항 해설’ 참고

ΔAQD에서 선분 AD와 선분 QD의 길이가 각각 2, 1인 것을 알기 때문에 사이각만 알면 코사인 법칙을 통해 AQ의 길이, 즉 $f(\theta)$를 구할 수 있습니다.

$\angle$ADQ는 $\angle$PAD(=θ)와 $\angle$APD의 합이고,

$\angle \mathrm{APD} = \alpha$라 하면 ΔAPD에서 사인 법칙을 통해 $\dfrac{\overline{\mathrm{PD}}}{\sin\theta} = \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\alpha}$, 즉 $\dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$이므로

$\sin\alpha = 2\sin\theta$입니다.

여기서 α라는 새로운 변수를 도입하였는데, 이는 $\sin\alpha = 2\sin\theta$라는 성질을 만족하며 θ의 값에 따라 정해지는 변수 α라는 뜻입니다. **미지의 변수가 아닌, θ와의 관련성을 갖고 움직이는 변수**인 것입니다.

따라서, $f(\theta)$를 구하는데 있어 α를 사용해서 표현해도 문제 없이 계산이 가능합니다.

이제 ΔAQD에서 선분 AD, 선분 QD의 길이와 사이각 $\theta+\alpha$를 알기 때문에 코사인 법칙으로 선분 AQ의 길이를 표현하면,

$$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{QD}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{QD}} \times \cos(\theta + \alpha)$$

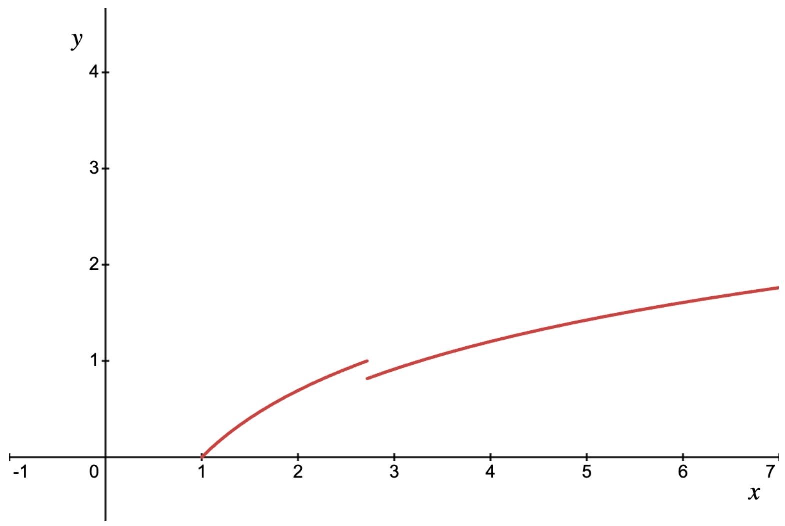
$$\rightarrow \overline{\mathrm{AQ}} = f(\theta) = \sqrt{5 - 4\cos(\theta + \alpha)}$$

미분을 통해 $f'(\theta) = \dfrac{2\sin(\theta+\alpha) \times \left(1 + \dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)}{\sqrt{5 - 4\cos(\theta+\alpha)}}$를 구해내고,

$\dfrac{d\alpha}{d\theta}$는 $\sin\alpha = 2\sin\theta$ 의 양변을 θ에 대하여 미분하면 쉽게 구할 수 있습니다.

이제 정해진 θ_0라는 값과 그 때의 α에 대하여, 대입만 해주면 답이 나옵니다.

*〔2018학년도 수능 21번〕 해제



t가 양수로 정해져 있으므로 위 그림과 같이 $f(x)$를 표현할 수 있을 것이고,

박스 안의 조건은 $\begin{cases} g(x) \geq f(x) & (x > e) \\ g(x) \leq f(x) & (x < e) \end{cases}$ 로 쉽게 풀어낼 수 있습니다.

이를 직관적으로 표현하면, e를 기준으로 왼쪽에서는 $g(x)$가 $f(x)$보다 더 아래편에, e의 오른쪽에서는 $g(x)$가 더 위편에 존재해야 함을 말합니다.

그러한 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$로 정의하고 있으므로
처음에 t가 아주 작은 양수값일 때는 $(1, 0)$과 $(e, 1-t)$를 지나는 기울기의 값이 $h(t)$일 것이고,
t가 어느 정도 커진 후에는 $(1, 0)$에서 $y = \ln x - t$에 그은 접선의 기울기의 값이 $h(t)$가 될 것입니다.

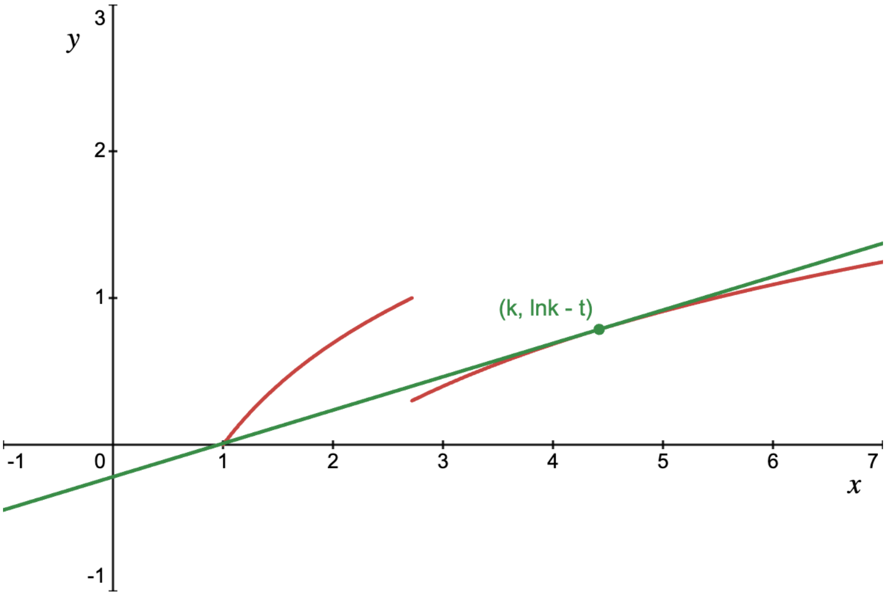
위의 두 가지 경우에 대한 기준점이 되는 것은 $(1, 0)$과 $(e, 1-t)$를 지나는 직선이 $y = \ln x - t$에 접할 때이므로 $\frac{1-t}{e-1} = \frac{1}{e}$, 즉 $t = \frac{1}{e}$일 때입니다.

문제에서 $t = \frac{1}{2e}$일 때와 $t = a$일 때 $h(t)$의 순간 변화율을 물어보고 있습니다.

1) $t = \frac{1}{2e}$일 때
이 경우 $h(t)$는 $(1, 0)$과 $(e, 1-t)$를 지나는 기울기의 값이므로
$h(t) = \frac{1-t}{e-1}$이고, $h'(t) = \frac{1}{1-e}$이므로 $h'(\frac{1}{2e}) = \frac{1}{1-e}$

2) $t=a$일 때

이 경우 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$ 라고 하였으므로 $h(t)$는 $(1,0)$에서 $y=\ln x-t$에 그은 접선의 기울기의 값입니다.



이때, 접점의 x좌표를 k로 설정하면, 접한다는 조건으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있습니다.

$$\to \ \frac{\ln k-t}{k-1}=\frac{1}{k}$$

여기서 k라는 새로운 변수를 도입하였는데, 이는 $\dfrac{\ln k-t}{k-1}=\dfrac{1}{k}$라는 성질을 만족하며 t의 값에 따라 정해지는 변수 k라는 뜻입니다. **미지의 변수가 아닌, t와의 관련성을 갖고 움직이는 변수**인 것입니다.

따라서, $h(t)$를 구하는데 있어 k를 사용해서 표현해도 문제 없이 계산이 가능합니다.

계산 과정을 마무리 해보겠습니다.

$\dfrac{\ln k-t}{k-1}=\dfrac{1}{k}$ 식을 정리하면 $t=\ln k+\dfrac{1}{k}-1$

(임의로 도입한 변수가 k이므로, 즉 k는 t의 종속변수이므로 $k=$ (t로 표현한 식) 인 형태면 더 직관적이겠으나, 그렇게 표현되지 않는 상황입니다.)

$t=\ln k+\dfrac{1}{k}-1$의 양변을 t에 대해 미분하면, $1=\dfrac{1}{k}\dfrac{dk}{dt}-\dfrac{1}{k^2}\dfrac{dk}{dt}=\dfrac{dk}{dt}\left(\dfrac{k-1}{k^2}\right)$ 이므로

$\dfrac{dk}{dt}=\dfrac{k^2}{k-1}$ 입니다.

$h(t)$는 $x=k$에서 일차함수 $g(x)=\ln x-t$의 접선의 기울기이므로 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $h(t)=\dfrac{1}{k}$ 입니다.

$h'(t) = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dt} = -\frac{1}{k^2}\frac{k^2}{k-1} = \frac{1}{1-k}$ 입니다.

문제에서 $h(a) = \frac{1}{e+2}$ 라고 하였으므로 $t=a$ 일 때 $k=e+2$ 입니다. ($\because h(t) = \frac{1}{k}$)

$\rightarrow\ h'(a) = \frac{1}{-e-1}$

정답은 $h'(\frac{1}{2e})h'(a) = \frac{1}{1-e} \times \frac{1}{-e-1} = \frac{1}{(e-1)(e+1)}$