수학 영역

5지선다형

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{2-2\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}} = 8$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = 2$

3. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 - a_3 = 8$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$2d=8$

$d=4$

$a_2 = a_1 + d = 5$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{h} = 6$일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 = 6$

$f'(1)=3$ $f(1)=4$

5. $\sin(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{8}{5}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$-2\sin\theta=\frac{8}{5}$ $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3a$가 $x=-2$에서 극대일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'(x)=3x^2+2ax$ $f'(-2)=12-4a=0$

$a=3$

$f(0)=3a=9$

7. 다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하고

$$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f'(x)\geq 0$

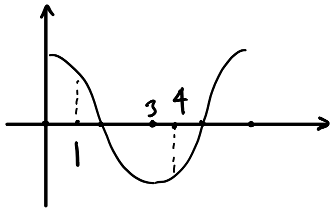
$f'(1)=0$ $\therefore$ $f'(x)=3(x-1)^2 \rightarrow f(1)=3$

$f(x)=(x-1)^3+3$

$f(2)=4$

8. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$



1에서 최대

$f(1)=\frac{1}{2}a=1$

$b=\frac{1}{3}$ ($\frac{2}{b}\pi=$주기) $a=2$

$a+b=\frac{7}{3}$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=1-4\times S_n$$

이고 $a_4=4$일 때, $a_1\times a_6$의 값은? [4점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

$a_{n+1}=1-4S_n$
$a_n=1-4S_{n-1}$
$a_{n+1}-a_n=-4(S_n-S_{n-1})$
$=-4a_n$
$\rightarrow a_{n+1}=-3a_n$

$a_6=36$ $a_2=\frac{4}{9}$

$a_2=1-4S_1$ $a_1=\frac{5}{36}$

$\frac{5}{36}\times 36=5$

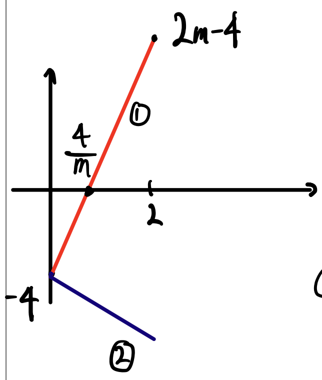
10. 실수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도를 각각

$$v_1(t)=3t^2+1,\quad v_2(t)=mt-4$$

라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 같도록 하는 모든 m의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

P: $[t^3+t]_0^2=10$



① $\frac{8}{m}+(2m-4)\times\left(2-\frac{4}{m}\right)\times\frac{1}{2}=10$

$m=8$

② $\left[\frac{1}{2}mt^2-4t\right]_0^2=-10$

$m=-1$

11. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m(m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1 - b_1| = 5$
> (나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

Let $a_n - b_n = C_n$

> (가) $|C_1| = 5$
> (나) $C_m = 0$ $C_m < 0$

공차 정수 → $d(m-1) = -5$

$m = 6$ or $m = 2$ $(m \geq 3)$

$$\sum_{k=1}^{m} C_n = \frac{C_1 + C_m}{2} \times m = 15$$

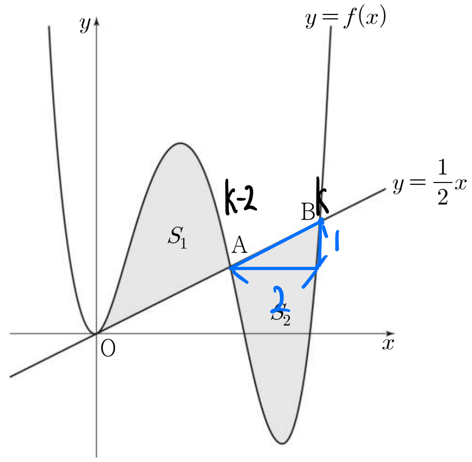
$$\sum_{k=1}^{m} a_k - b_k = 15 \quad \therefore b_k = -6$$

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고

x좌표가 양수인 두 점 A, B($\overline{OA} < \overline{OB}$)에서 만난다.
곡선 $y = f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,
곡선 $y = f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자.
$\overline{AB} = \sqrt{5}$이고 $S_1 = S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$



$$f(x) - \frac{1}{2}x = x^2(x-k)(x-k+2)$$

$$\int_0^k x^2(x-k)(x-k+2)\,dx = \int_0^k x^4 - (2k-2)x^3 + (k^2-2k)x^2\,dx = 0$$

$$\frac{1}{5}k^5 - \frac{(k-2)}{2}k^4 + \frac{(k^2-2k)}{3}k^3 = 0$$

$$\frac{1}{5}k - \frac{(k-2)}{2} + \frac{(k-2)}{3} = 0$$

$k = 5$ $f(1) = \frac{1}{2} + (-4)(-2) = \frac{17}{2}$

13. 두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \le a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

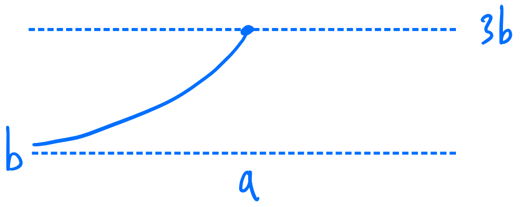
$b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

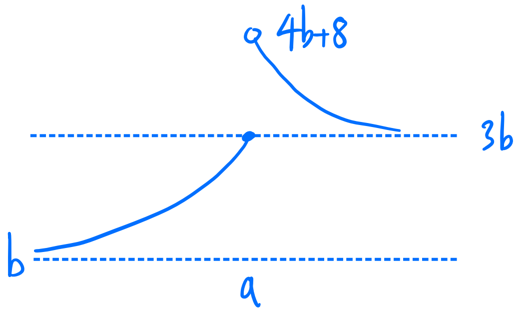
i) $b<t<4b+8$에서만 $f(x)$와 $y=t$ 교점 1개

ii) $3b$가 t에 포함 → $x\le a$에서 $3b$지남

$3b$보다 클때는 지나면 안됨 → $f(a)=3b$



iii) t가 $4b+8$ 까지임 → $\lim_{x\to a+} f(x)=4b+8$



$2^{a+3}+b=3b$ $a=1$ $b=8$

$2^{-a+5}+3b=4b+8$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lvert f(k)\rvert+\lvert g(k)\rvert=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

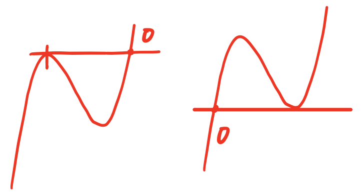
$\lvert f(k)\rvert+\lvert g(k)\rvert=0$

$f(k)=0,\ g(k)=0$

→ $k=0$ or $f'(k)=0$ 만족 k 2개만

→ $f(k)=f'(k)=0,\ f(0)=0$

$4f(1)+2\{-f'(1)+f(1)\}=-1$ $6f(1)-2f'(1)=-1$



→ $f(x)=x(x-a)^2$

$f'(x)=(x-a)^2+x(x-a)$

$6(1-a)^2-2\{(1-a)^2+(1-a)\}=-1$ $a=\frac{1}{2}$

$f(x)=x(x-\frac{1}{2})^2$ $f(4)=49$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\ \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 63 ② 66 ③ 69 ④ 72 ⑤ 75

i) $a_n=3k-1$ (k는 자연수)
→ $a_{n+1}=3k^2-2k+2$

ii) $a_n=3k-2$
→ $a_{n+1}=3k^2-4k+3$

iii) $a_n=3k$
→ $a_{n+1}=k$

모든 a_n → 자연수

① $a_4=3k$
→ $k=\frac{5}{4}$ X 모순

② $a_4=3k-2$
→ $k=\frac{4}{3}$ or $k=-1$ X 모순

③ $a_4=3k-1$
→ $k=-\frac{4}{3}$ or $k=1$

1 2 3 4
54 18 6 2
7
9 3 1
2

$54+7+9+2=72$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3)=1-\log_2(x-4)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2(x-3)(x-4)=\log_2 2$

$x^2-7x+12=2$

$x=5$ or $x=2$

17. 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=(x^3+x^2+5)+(x-1)(3x^2+2x)$

$f'(1)=7$

18. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 2x^3 + \int_0^{-x} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2x^3$

$f(x) = 3x^2 + ax$ $f(1)=5$

$f(x) = 3x^2 + 2x$ $f(2)=16$

19. 집합 $U=\{x \mid -5 \le x \le 5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{a \mid a$는 x의 실수인 네제곱근, $x \in X\}$,
$B=\{b \mid b$는 x의 실수인 세제곱근, $x \in X\}$

라 하자. $n(A)=9$, $n(B)=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. [3점]

$U=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

$n(B)=7 \to$ U에서 7개 선택

$n(A)=9 \to$ 0무조건 선택 + 양수 4개

최대 $\to X=\{5,4,3,2,0,-1,-2\}$

11

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 $k(k \ne 0)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \times \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = k$$

일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} \to$ 0이 아닌 값

$\underbrace{g(x) \text{ 최고차항계수}}_{①} = \underbrace{f(x)\text{의 최고차항 차수}}_{②} \times 2$

i) ① ≥ 4

$xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$

$\to$ ② = ① − 1 모순

∴ ①=2 ②=1

$xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$

i) 다항함수 조건
ii) $g(1)=0$
iii) $g(x)$ 2차, $f(x)$ 1차

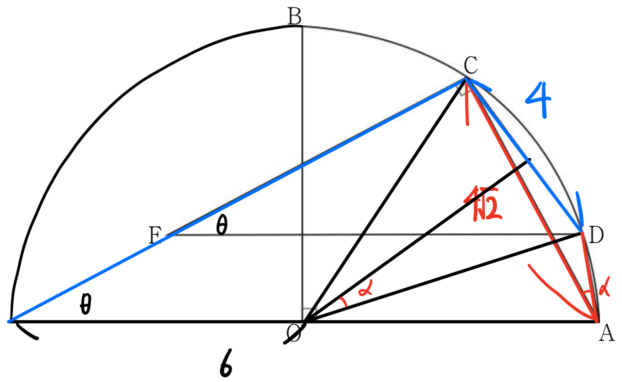
$\to g(x) = -2x^2+2x$

$f(x) = -5x+6$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{2x^2-7x+6} \times \lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x} = k$$

$= -2 \times -\frac{25}{2} = 25$

21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\rightarrow 2R\times\sin\theta=\overline{CD}=4$

$\cos\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\rightarrow 16=32+\overline{AD}^2-2\overline{AD}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\overline{AD}^2-\frac{32}{3}\overline{AD}+16=0$

$\overline{AD}=\frac{16}{3}-\sqrt{\frac{256}{9}-16}=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{7}$

$|p\times q|\times9=\frac{64}{9}\times9=64$

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & (x<a)\\ -2x-3 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

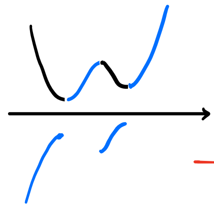
(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)|=f(x),\quad \lim_{t\to0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$$

이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\frac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]



$g(x)=\begin{cases}f(x) & (f'(x)>0)\\ -f(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$

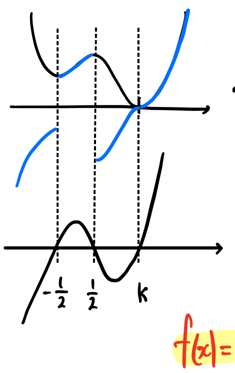
→ 불연속점개수 (모두 극점에서) — $f(x)=0$, $f'(x)=0$ 만족 x 존재시 2
그외 3

$g(x)h(x)$ 연속

i) $h(t)=0\rightarrow f'(t)=0$ $\quad t=-\frac{1}{2}$

ii) $\lim_{x\to a-}h(x)=-\lim_{x\to a+}h(x)$, $f'(a)=0$ $\quad a=\frac{1}{2}$

iii) $f(k)=0$, $f'(k)=0$ 인 k 존재



$f(x)=4x^4-\frac{16}{3}kx^3-2x^2+4kx+\frac{40}{3}$

$\rightarrow f(k)=0 \quad \therefore k=2$

$f'(x)=16(x^2-\frac{1}{4})(x-k)$

$f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$

$h(3)=-9$ $\quad f(1)=-g(1)=\frac{38}{3}$, $\quad -9\times-\frac{38}{3}=114$

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.